

# EE881 – Princípios de Comunicações I

## Resumo de Conceitos e Resultados

Henrique Miyamoto

1º semestre 2022

### NOTAÇÃO

$x$ ,  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{M}$  representam escalares, vetores e matrizes determinísticos, respectivamente.  $X$  e  $\mathbf{X}$  representam variáveis aleatórias e vetores aleatórios, respectivamente. A unidade imaginária é denotada  $\mathbf{j} = \sqrt{-1}$ . O conjugado complexo de  $z$  é denotado  $z^*$ . A função indicadora  $\mathbb{1}_{\mathcal{A}}(x)$  vale 1 se  $x \in \mathcal{A}$ , e 0 se  $x \notin \mathcal{A}$ . A sigla “v.a.(s)” significa “variável(is) aleatória(s)”. Definimos  $\text{sinc}(x) := \sin(\pi x)/\pi x$ .

### 1. CANAL A TEMPO DISCRETO: PRIMEIRA CAMADA

#### A. Modelo geral

O modelo geral do sistema está ilustrado na Fig. 1. A fonte produz mensagens modeladas como v.a.s  $H \in \mathcal{H} = \{0, \dots, m-1\}$ . O transmissor mapeia a mensagem  $H = i$  para a palavra-código  $c_i \in \mathcal{C} \subset \mathcal{X}^n$ . O canal é modelado de maneira probabilística pela pdf  $f_{Y|X}(\cdot|x)$  e produz a observação  $Y \in \mathcal{Y}^n$ . A tarefa do receptor é estimar a hipótese  $\hat{H} \in \mathcal{H}$  que produziu a estatística  $Y$ .



Figura 1: Diagrama do sistema.

#### B. Teste de hipóteses

*Teste de hipóteses* refere-se ao problema de estimar a realização de uma v.a.  $H \in \mathcal{H}$  com base no resultado da v.a.  $Y$ , chamada *observável*.

O critério máximo *a posteriori* (MAP) otimiza a probabilidade de acerto e é dado por

$$\begin{aligned} \hat{H}_{\text{MAP}}(y) &= \arg \max_{i \in \mathcal{H}} P_{H|Y}(i|y) \\ &= \arg \max_{i \in \mathcal{H}} P_H(i) f_{Y|H}(y|i). \end{aligned} \quad (1)$$

O critério de máxima verossimilhança (ML) é sub-ótimo e coincide com o critério MAP sob hipótese de *priors* uniformes. É dado por

$$\hat{H}_{\text{ML}}(y) = \arg \max_{i \in \mathcal{H}} f_{Y|H}(y|i). \quad (2)$$

**Exemplo 1.1.** No caso binário  $m = 2$ , o critério MAP pode ser escrito como

$$\underbrace{\Lambda(y)}_{\text{razão de verossimilhança}} := \frac{f_{Y|H}(y|1)}{f_{Y|H}(y|0)} \stackrel{\hat{H}=1}{\underset{\hat{H}=0}{\gtrless}} \frac{P_H(0)}{P_H(1)} =: \underbrace{\eta}_{\text{limiar}}. \quad \triangle$$

Uma função  $\hat{H} : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{H}$  é chamada *função de decisão*. A  $i$ -ésima *região de decisão* é definida  $\mathcal{R}_i := \{y \in \mathcal{Y} : \hat{H}(y) = i\}$ . A probabilidade de erro para hipótese  $H = i$  é dada por

$$P_e(i) := \Pr\{Y \in \mathcal{R}_i^c | H = i\} = \int_{\mathcal{R}_i^c} f_{Y|H}(y|i) dy, \quad (3)$$

sendo a probabilidade de erro total

$$P_e := \Pr\{\hat{H} \neq H\} = \sum_{i \in \mathcal{H}} P_H(i) P_e(i).$$

#### C. A função Q

A função  $Q$  é definida como

$$Q(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty \exp\left(-\frac{\xi^2}{2}\right) d\xi \quad (4)$$

e permite calcular a probabilidade  $\Pr\{Z \geq x\} = Q(x)$  para uma v.a.  $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$  de distribuição gaussiana padronizada. Como consequência,  $\Pr\{Z \leq x\} = 1 - Q(x) = Q(-x)$ . Note que, se  $Z \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ , então  $\frac{Z-\mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)$ .

#### D. Projeto do receptor para canal AWGN em tempo discreto

No caso de comunicações digitais, a hipótese  $H \in \mathcal{H}$  representa uma mensagem, as palavras-código são vetores  $c_i \in \mathbb{R}^n$  e o canal adiciona ruído gaussiano  $Z \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 I_n)$ . O observável é  $Y = (c_i + Z) \sim \mathcal{N}(c_i, \sigma^2 I_n)$ .

**Exemplo 1.2.** No caso binário  $m = 2$ , a regra MAP pode ser escrita como

$$\left\langle y, \underbrace{\frac{c_1 - c_0}{d}}_{\psi} \right\rangle \stackrel{\hat{H}=1}{\underset{\hat{H}=0}{\gtrless}} \underbrace{\frac{\sigma^2}{d} \ln \eta + \frac{\|c_1\|^2 - \|c_0\|^2}{2d}}_{\theta},$$

onde  $d := \|c_1 - c_0\|$  e  $\eta := \frac{P_H(0)}{P_H(1)}$ . Nesse caso, as regiões  $\mathcal{R}_0$  e  $\mathcal{R}_1$  são delimitadas pelo plano  $\{y \in \mathbb{R}^n : \langle y, \psi \rangle = \theta\}$ . Quando os *priors* são uniformes, a probabilidade de erro é dada por

$$P_e = Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right). \quad \triangle$$

Em geral, a regra ML pode ser escrita

$$\hat{H}_{\text{ML}}(y) = \arg \max_{i \in \mathcal{H}} f_{Y|H}(y|i) = \arg \min_{i \in \mathcal{H}} \|y - c_i\|,$$

o que corresponde ao critério de distância mínima. Nesse caso, as regiões  $\mathcal{R}_i$  são as *regiões de Voronoi* de  $c_i$ .

**Exemplo 1.3.** Exemplos de constelações são PAM (*pulse amplitude modulation*) (Fig. 2), QAM (*quadrature amplitude modulation*) (Fig. 3) e PSK (*phase shift keying*) (Fig. 3). Estaremos interessados em avaliar a probabilidade de erro  $P_e$  de cada uma delas em função da relação sinal-ruído (SNR)  $\mathcal{E}/\sigma^2$ , onde  $\mathcal{E} := \sum_{i \in \mathcal{H}} P_H(i) \|c_i\|^2$ .

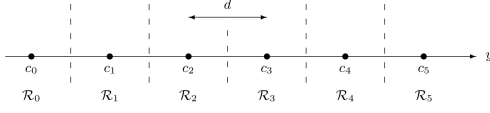


Figura 2: Exemplo de constelação 6-PAM.

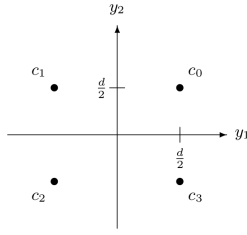


Figura 3: Exemplo de constelação 4-QAM.

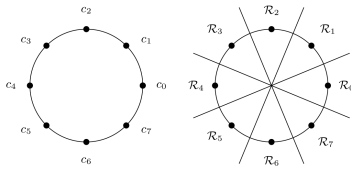


Figura 4: Exemplo de constelação 8-PSK.

Além disso, definindo<sup>1</sup>  $\mathcal{B}_{i,j} := \{y : P_{H|Y}(j|y) \geq P_{H|Y}(i|y)\}$  e usando que  $\mathcal{R}_i^c \subseteq \bigcup_{j \neq i} \mathcal{B}_{i,j}$ , obtemos

$$\begin{aligned} P_e(i) &\leq \sum_{j:j \neq i} \Pr\{Y \in \mathcal{B}_{i,j} | H = i\} \\ &= \sum_{j:j \neq i} \int_{\mathcal{B}_{i,j}} f_{Y|H}(y|i) dy. \end{aligned} \quad (5)$$

Um limitante mais geral é o *limitante da união de Bhattacharyya* [1, p. 48]:

$$P_e \leq \sum_{i,j \neq i} \sqrt{P_H(i)P_H(j)} \int_{\mathbb{R}^n} \sqrt{f_{Y|H}(y|i)f_{Y|H}(y|j)} dy. \quad (6)$$

## 2. CANAL A TEMPO CONTÍNUO: SEGUNDA CAMADA

### A. Modelo geral

Consideramos  $\mathcal{W} = \{w_0(t), \dots, w_{m-1}(t)\}$  conjunto de sinais contínuos e de energia finita. O conjunto  $\mathcal{V}$  gerado por  $\mathcal{W}$  é um espaço vetorial com produto interno das funções quadrado-integráveis<sup>2</sup>.

Ao descer uma camada, adicionamos dois blocos. O transmissor agora é formado pelo codificador  $i \mapsto c_i$ , e por um *formador de forma de onda*, que implementa  $c_i \mapsto w_i(t)$ . Analogamente, o receptor é formado por um *formador de n-uplas*  $R(t) \mapsto Y$  que reconstrói a  $n$ -upla  $Y$  a partir do sinal recebido  $R(t)$ , e pelo decodificador  $Y \mapsto \hat{H}$ .

### B. Ruído gaussiano branco

**Definição 2.1.** Diremos que  $N(t)$  é um *ruído gaussiano branco*<sup>3</sup> de densidade espectral de potência  $\frac{N_0}{2}$  se, para funções  $\mathcal{L}_2$  reais  $\{g_1(\alpha), \dots, g_k(\alpha)\}$  quaisquer, as variáveis  $\{Z_1, \dots, Z_k\}$ , obtidas por

$$Z_i = \int N(\alpha) g_i(\alpha) d\alpha \quad (7)$$

formam uma coleção de v.a.s gaussianas centradas, conjuntamente distribuídas, de covariância  $\frac{N_0}{2} \langle g_i, g_j \rangle$ .

Em particular, se  $\{g_1(\alpha), \dots, g_k(\alpha)\}$  é um conjunto ortonormal, então as v.a.s  $Z_i \stackrel{\text{i.i.d.}}{\sim} \mathcal{N}(0, \frac{N_0}{2})$ .

O ruído é dito *branco*, porque se estende por todo o espectro (em analogia com a luz branca).

**Exemplo 2.1.** Se escolhermos  $g_i(t) := h(\frac{i}{2B} - t)$ , com  $h(t)$  resposta ao impulso de um filtro passa-baixas de frequência de corte  $B$ , então os valores

$$V_i = \int N(t) h\left(\frac{i}{2B} - t\right) dt, \quad (8)$$

i.e., as saídas do filtro  $h(t)$ , quando alimentado pelo sinal  $N(t)$ , e amostradas nos instantes  $t = i/2B$ , formarão um conjunto de v.a.s i.i.d. gaussianas.  $\triangle$

<sup>1</sup> $\mathcal{B}_{i,j}$  é o conjunto dos valores  $y$  tais que a regra MAP decide por  $j$  em vez de  $i$ .

<sup>2</sup>A rigor, devemos considerar o espaço  $\mathcal{L}_2$ , com a relação de equivalência  $f \sim g \iff \int |f(t) - g(t)|^2 dt = 0$  [1, p. 183].

<sup>3</sup>Pode ser equivalentemente definido como um processo estocástico  $N(t)$  centrado, WSS, de auto-covariância  $K_N(\tau) = \frac{N_0}{2} \delta(\tau)$ .

### E. Irrelevância e estatística suficiente

**Definição 1.1.** Três v.a.s  $U, V, W$  formam uma *cadeia de Markov*  $U \rightarrow V \rightarrow W$  se

$$P_{W|V,U}(w|v, u) = P_{W|V}(w|v).$$

**Definição 1.2.** Seja  $T(Y)$  v.a. resultante do processamento da v.a.  $Y$ . Dizemos que  $T(Y)$  é uma *estatística suficiente* para a hipótese  $H$  se  $H \rightarrow T(Y) \rightarrow Y$  forma uma cadeia de Markov. Nesse caso, temos

$$P_{H|Y}(i|y) = P_{H|Y,T(Y)}(i|y, T(y)) = P_{H|T(Y)}(i|T(y)).$$

**Teorema 1.1.** Se  $T(Y)$  é uma estatística suficiente para  $H$ , então um decodificador MAP que estima  $H$  a partir de  $T(Y)$  atinge a mesma probabilidade de erro que um outro que estima  $H$  a partir de  $Y$ .

Se o observável é da forma  $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2)$  e  $Y_1$  é uma estatística suficiente, então dizemos que  $Y_2$  é *irrelevante*.

### F. Limitantes da probabilidade de erro

O *limitante da união* é baseado no fato de que

$$P\left(\bigcup_{i=1}^m \mathcal{A}_i\right) \leq \sum_{i=1}^m P(\mathcal{A}_i).$$

### C. Observáveis e estatística suficiente

Considere  $R(t) = w_i(t) + N(t)$  versão ruidosa do sinal.

**Proposição 2.1.** *Seja  $\mathcal{V}$  espaço com produto interno gerado pelos elementos de  $\mathcal{W}$  e seja  $\{\psi_1(t), \dots, \psi_n(t)\}$  uma base de  $\mathcal{V}$ . Então a  $n$ -upla  $Y = (Y_1, \dots, Y_n)$ , com  $i$ -ésimo elemento definido por*

$$Y_i = \langle R(t), \psi_i(t) \rangle = \int R(\alpha) \psi_i^*(\alpha) d\alpha, \quad (9)$$

é uma estatística suficiente para a hipótese  $H$ .

Note que  $Y = c_i + Z_{|V}$  é a projeção de  $R(t)$  no espaço  $\mathcal{V}$  e  $Z_{\perp V}$  é uma componente de ruído ortogonal a  $\mathcal{V}$ . Além disso,  $Z_{|V} \sim \mathcal{N}(0, \frac{N_0}{2} I_n)$  e  $Z_{\perp V} \sim \mathcal{N}(0, \frac{N_0}{2} I_{\bar{n}})$ .

### D. Arquitetura do emissor e receptor

A arquitetura do par emissor/receptor em canal contínuo está representada na Fig. 5. O *emissor* usa as palavras-código  $c_i$  para produzir as formas de onda  $w_i(t)$ . O *receptor* calcula a estatística suficiente  $Y$  a partir do sinal recebido  $R(t)$ . O problema de teste de hipóteses se reduz então àquele em tempo discreto, já analisado.

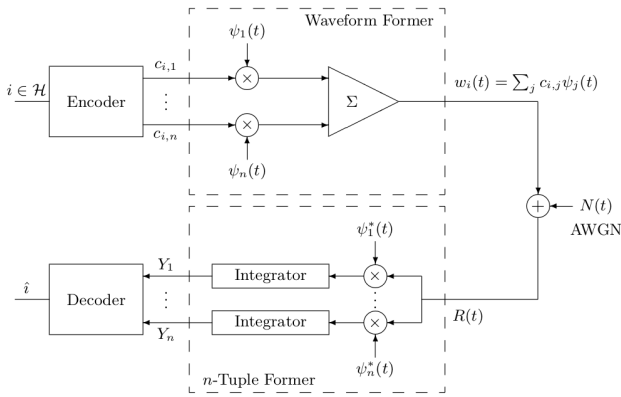


Figura 5: Arquitetura do emissor/receptor para canal contínuo.

### Exemplo 2.2. Exemplos de modulação.

- *Single-shot PAM*: sinais da forma

$$w_i(t) = c_i \psi(t),$$

com  $c_i \in \{\pm a, \pm 3a, \dots, \pm(m-1)a\}$  e  $\psi(t)$  pulso de energia unitária.

- *Single-shot PSK*: sinais da forma

$$w_i(t) = c_{i,1} \psi_1(t) + c_{i,2} \psi_2(t),$$

com

$$c_i = \begin{pmatrix} c_{i,1} \\ c_{i,2} \end{pmatrix} = \sqrt{\mathcal{E}} \begin{pmatrix} \cos 2\pi i/m \\ \sin 2\pi i/m \end{pmatrix},$$

$$\psi_1(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \cos(2\pi f_c t) \mathbb{1}_{[0,T]}(t),$$

$$\psi_2(t) = -\sqrt{\frac{2}{T}} \sin(2\pi f_c t) \mathbb{1}_{[0,T]}(t).$$

- *Single-shot QAM*: sinais da forma

$$w_i(t) = c_{i,1} \psi_1(t) + c_{i,2} \psi_2(t),$$

com  $(c_{i,1}, c_{i,2}) \in \{\pm a, \pm 3a, \dots, \pm(m-1)a\}^2$  e

$$\psi_1(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \cos(2\pi f_c t) \mathbb{1}_{[0,T]}(t),$$

$$\psi_2(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \sin(2\pi f_c t) \mathbb{1}_{[0,T]}(t). \quad \triangle$$

### E. Generalização e estruturas alternativas de recepção

A regra MAP pode ser escrita de maneiras equivalentes:

$$\begin{aligned} \hat{H}(y) &= \arg \min_{j \in \mathcal{H}} \|y - c_j\| - N_0 \ln P_H(j) \\ &= \arg \max_{j \in \mathcal{H}} \langle y, c_j \rangle - \frac{\|c_j\|^2}{2} + \frac{N_0}{2} \ln P_H(j) \\ &= \arg \max_{j \in \mathcal{H}} \int r(t) w_j^*(t) dt - \frac{\|w_j\|^2}{2} + \frac{N_0}{2} \ln P_H(j). \end{aligned}$$

Em toda elas, é necessário realizar uma operação do tipo

$$\int r(t) b^*(t) dt, \quad (10)$$

onde  $b(t)$  é uma função do tipo  $\psi_j(t)$  ou  $w_j(t)$ . Há duas maneiras de implementar essa operação (Fig. 6).

- 1) Com um *correlator*, um dispositivo que multiplica e integra dois sinais.
- 2) Com um *filtro casado* de resposta ao impulso  $h(t) = b^*(T-t)$ , com  $T$  escolhido de forma a torná-lo causal. Em  $t = T$ , a saída do filtro é igual a (10).

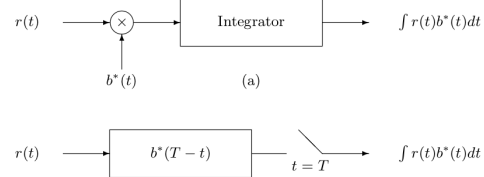


Figura 6: Arquiteturas de recepção: correlator (acima) e filtro casado (abaixo).

A Fig. 7 mostra diagramas de blocos para duas implementações para receptor MAP com filtros casados (poderiam-se usar correladores). Note que a segunda não requer uma base ortonormal nem conhecimento de livro de códigos, mas usa  $m$  em vez de  $n$  filtros casados ( $m \geq n$ ).

## 3. COMPROMISSOS NO PROJETO DE SINAIS

### A. Transformações isométricas no livro de códigos

Uma *isometria* é uma transformação que preserva distâncias:

**Definição 3.1.** Sejam  $\mathcal{V}, \tilde{\mathcal{V}}$  espaços com produto interno. Dizemos que uma aplicação  $f: \mathcal{V} \rightarrow \tilde{\mathcal{V}}$  é uma *isometria* se  $\|x - y\| = \|f(x) - f(y)\|, \forall x, y \in \mathcal{V}$ .

Em  $\mathcal{V} = \mathbb{R}^n$ , todas as isometrias podem ser obtidas por composição de reflexão, rotação e translação.

- Ao aplicar uma isometria a um livro de códigos, a probabilidade de erro permanece inalterada.
- Reflexões e rotações não alteram a energia média de uma constelação, mas translações, sim.

Se um livro de códigos  $\mathcal{C} = \{c_0, \dots, c_{m-1}\}$  com energia  $\mathcal{E}$  tem média  $b = \sum_i P_H(i) c_i \neq 0$ , então a translação que minimiza a energia da constelação é  $\tilde{c}_i = c_i - b$ . A energia da nova constelação é  $\tilde{\mathcal{E}} = \mathcal{E} - \|b\|^2$ .

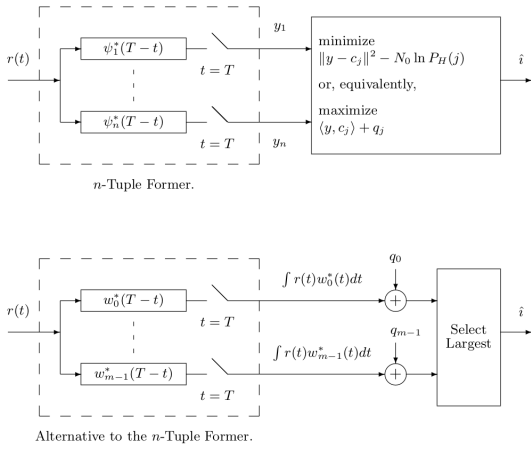


Figura 7: Diagrama de blocos de um receptor MAP para canal AWGN.  $y = (y_1, \dots, y_n)^\top$  e  $q_j = -\|w_j\|^2/2 + (N_0/2) \ln P_H(j)$ .

### B. Transformações isométricas no conjunto de sinais

Seja  $\mathcal{V}$  espaço com produto interno gerado pelo conjunto de sinais  $\mathcal{W} = \{w_0(t), \dots, w_{m-1}(t)\}$ . Sejam  $\mathcal{B} = \{\psi_1(t), \dots, \psi_n(t)\}$  uma base de  $\mathcal{V}$ ,  $f: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$  uma isometria e  $\tilde{\mathcal{W}} = f(\mathcal{W}) \subset \mathcal{V}$ .

Usando a base  $\mathcal{B}$ , podemos encontrar a isometria no livro de códigos que corresponde à isometria  $f$  no espaço de sinais através da composição  $c_i \rightarrow w_i \rightarrow \tilde{w}_i \rightarrow \tilde{c}_i$ .

Por outro lado, uma isometria no espaço de sinais dada pela escolha de uma nova base  $\tilde{\mathcal{B}}$  de  $\mathcal{V}$  não pode ser representada no livro de códigos.

### C. Escalabilidade: $n$ versus $k$

Vamos considerar constelações  $\mathcal{C} = \{c_0, \dots, c_{m-1}\}$  de tamanho  $m$ , dimensão  $n$  e energia  $\mathcal{E}$ . Definimos  $k := \log_2 m$  o número de bits por símbolo e  $\mathcal{E}_b := \mathcal{E}/k$  a energia por bit. Queremos estudar o comportamento da probabilidade de erro quando  $k \rightarrow \infty$ , para  $\mathcal{E}_b$  fixo. Seja  $\mathcal{B} = \{\psi_1(t), \dots, \psi_n(t)\}$  uma base ortonormal e  $\sigma^2 = \frac{N_0}{2}$  variância do ruído gaussiano.

**Exemplo 3.1** (Single-shot PAM). Nesse caso,  $n = 1$  (dimensão fixa) e consideramos uma constelação PAM (cf. Exemplo 1.3). Os sinais são da forma

$$w_i(t) = c_i \psi_i(t).$$

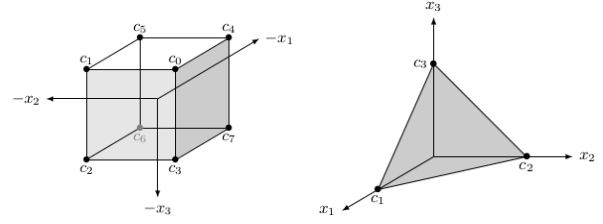
A distância mínima é

$$d = 2\sqrt{\frac{3\mathcal{E}_b \log_2 m}{m^2 - 1}}$$

e a probabilidade de erro,

$$P_e = \left(2 - \frac{2}{m}\right) Q\left(\sqrt{\frac{2\mathcal{E}_b \log_2 m}{\sigma^2(m^2 - 1)}}\right) \rightarrow 1, \quad m \rightarrow \infty. \quad \triangle$$

**Exemplo 3.2** (Bit a bit em trem de pulsos). Nesse caso,  $n = k$  (uma dimensão por bit). Seja  $(b_{i,1}, \dots, b_{i,k}) \in \{\pm 1\}^k$  a representação binária da mensagem  $i$ . Associa-



(a) Bit a bit em trem de pulsos. (b) Bloco ortogonal.

Figura 8: Constelações para  $n = 3$ .

mos  $c_{i,j} = b_{i,j} \sqrt{\mathcal{E}_b}$ , de forma que a constelação é formada pelos vértices de um (hiper)cubo. Os sinais são da forma

$$w_i(t) = \sum_{j=1}^k c_{i,j} \psi_j(t).$$

A distância mínima é

$$d = 2\sqrt{\mathcal{E}_b},$$

e a probabilidade de acerto de cada bit,  $P_{c,b} = 1 - Q\left(\frac{\sqrt{\mathcal{E}_b}}{\sigma}\right)$ , não depende de  $k$ . A probabilidade de acerto total é

$$P_c = \left[1 - Q\left(\frac{\sqrt{\mathcal{E}_b}}{\sigma}\right)\right]^k \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty. \quad \triangle$$

**Exemplo 3.3** (Bloco ortogonal). Nesse caso,  $n = m = 2^k$  (uma dimensão por símbolo), de forma que a constelação é formada por palavras-código mutuamente ortogonais. Os sinais são da forma

$$w_i(t) = \sqrt{\mathcal{E}_b} \psi_i(t).$$

A distância mínima é

$$d = \sqrt{2k\mathcal{E}_b}$$

e a probabilidade de erro é superiormente limitada por

$$P_e < \exp\left[-k\left(\frac{\mathcal{E}_b}{2N_0} - \ln 2\right)\right].$$

Temos que  $P_e \rightarrow 0$  para  $k \rightarrow \infty$ , desde que  $\frac{\mathcal{E}_b}{N_0} > 2 \ln 2$ .  $\triangle$

### D. Duração, Largura de Banda e Dimensionalidade

É possível mostrar que o conjunto de sinais de energia finita, limitados a largura de banda  $W$  e intervalo de tempo  $T$ , tem dimensão

$$n \doteq TW,$$

onde o símbolo  $\doteq$  indica que a relação é assintótica e vale no limite  $T \rightarrow \infty$ ,  $W \rightarrow \infty$ .

Em sistemas práticos, a largura de banda  $W$  está fixa e  $T$  cresce linearmente com  $k$ . Portanto, a sinalização bloco ortogonal ( $n = 2^k$ ) não é escalável, e bit a bit em trem de pulsos é a única candidata viável para escalabilidade.

## 4. PROJETO DA SEGUNDA CAMADA

Queremos saber como escolher  $\psi(t)$ . Vamos considerar a técnica de sinalização *símbolo a símbolo em um trem de pulsos*, em que cada  $i$ -ésimo sinal é da forma

$$w_i(t) = \sum_{j=1}^n s_{i,j} \psi(t - jT). \quad (11)$$

### A. O caso passa-baixas ideal

**Teorema 4.1** (da amostragem (Nyquist-Shannon)). *Seja  $w(t)$  um sinal  $\mathcal{L}_2$  contínuo e  $w_{\mathcal{F}}(f)$  sua transformada de Fourier, limitada ao intervalo  $[-B, B]$ . Então  $w(t)$  pode ser reconstruído a partir de uma sequência de amostras  $w(nT)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , igualmente espaçadas de um intervalo  $T$ , desde que  $T \leq \frac{1}{2B}$ . Especificamente,*

$$w(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} w(nT) \operatorname{sinc} \left( \frac{t}{T} - n \right). \quad (12)$$

Definindo o sinal normalizado  $\psi(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \operatorname{sinc} \left( \frac{t}{T} \right)$ , o conjunto  $\{\psi(t - jT)\}_{j \in \mathbb{Z}}$  forma uma base ortonormal para os sinais que satisfazem as condições do Teorema 4.1. Nesse caso, (12) pode ser reescrita como

$$w(t) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} s_j \psi(t - jT),$$

que tem a forma de símbolo a símbolo em um trem de pulsos.

Note que  $s_j = w(jT) \sqrt{T}$ , e que o filtro casado (com o sinal  $\psi(t)$ ) é um filtro passa-baixas, pois a transformada de Fourier  $\psi_{\mathcal{F}}(f)$  é uma função retângulo.

### B. Densidade espectral de potência

Considere um sinal na saída do transmissor da forma<sup>4</sup>

$$X(t) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} X_i \xi(t - iT - \Theta), \quad (13)$$

onde  $X_i = \{X_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$  é um processo estocástico WSS (*wide sense stationary*)<sup>5</sup> a tempo discreto,  $\xi(t)$  é uma função  $\mathcal{L}_2$  e  $\Theta$  é um atraso aleatório, independente de  $X_i$ , e uniformemente distribuído em  $[0, T[$ .

A função de *autocovariância* de  $X_i$  é

$$K_X[k] := \mathbb{E}[(X_{i+k} - \mathbb{E}[X_{i+k}])(X_i - \mathbb{E}[X_i])^*] = \mathbb{E}[X_{i+k} X_i^*]$$

e a função de *autossimilaridade* de  $\xi(t)$  é

$$R_{\xi}(\tau) := \int_{-\infty}^{\infty} \xi(\alpha + \tau) \xi^*(\alpha) d\alpha.$$

A autocovariância de  $X(t) = \{X(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$  é

$$K_X(\tau) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} K_X[k] \frac{1}{T} R_{\xi}(\tau - kT), \quad (14)$$

e sua densidade espectral de potência é

$$S_X(f) = \frac{|\xi_{\mathcal{F}}(f)|^2}{T} \sum_{k \in \mathbb{Z}} K_X[k] \exp(-j2\pi k f T), \quad (15)$$

que pode ser interpretada como o produto das PSDs de  $\xi(t)$  e de  $X_i$ .

**Exemplo 4.1.** Quando o processo WSS  $X_i$  é *descorrelacionado*, temos  $K_X[k] = \mathcal{E} \delta(k)$ ,  $\mathcal{E} = \mathbb{E}[|X_i|^2]$ . Nesse caso,

$$K_X(\tau) = \mathcal{E} \frac{R_{\xi}(\tau)}{T} \quad \text{e} \quad S_X(f) = \mathcal{E} \frac{|\xi_{\mathcal{F}}(f)|^2}{T}.$$

△

<sup>4</sup>Ver Resumo de Ferramentas Matemáticas.

<sup>5</sup>Significa que nem sua média nem sua autocovariância dependem do instante  $i$ .

### C. Critério de Nyquist para bases ortonormais

**Teorema 4.2** (Critério de Nyquist para bases ortonormais). *Seja  $\psi(t)$  uma função  $\mathcal{L}_2$ . O conjunto  $\{\psi(t - jT)\}_{j \in \mathbb{Z}}$  é um conjunto ortonormal se, e somente se<sup>6</sup>,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=-n}^n \left| \psi_{\mathcal{F}} \left( f - \frac{k}{T} \right) \right|^2 = T, \quad f \in \mathbb{R}.$$

**Exemplo 4.2.** Funções que satisfazem o critério de Nyquist:

- 1)  $|\psi_{\mathcal{F}}(f)|^2 = T \mathbb{1}_{[-\frac{1}{2T}, \frac{1}{2T}]}(f)$
- 2)  $|\psi_{\mathcal{F}}(f)|^2 = T \cos^2 \left( \frac{\pi}{2} f T \right) \mathbb{1}_{[-\frac{1}{2T}, \frac{1}{2T}]}(f)$
- 3)  $|\psi_{\mathcal{F}}(f)|^2 = T(1 - T|f|) \mathbb{1}_{[-\frac{1}{2T}, \frac{1}{2T}]}(f)$

△

### D. Família raiz de cosseno levantado

Para  $\beta \in ]0, 1[$  e  $T > 0$ , a *função cosseno levantado*

$$|\psi_{\mathcal{F}}(f)|^2 = \begin{cases} T, & |f| \leq \frac{1-\beta}{2T} \\ \frac{T}{2} \left( 1 + \cos \left[ \frac{\pi T}{\beta} \left( |f| - \frac{1-\beta}{2T} \right) \right] \right), & \frac{1-\beta}{2T} < |f| < \frac{1+\beta}{2T} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (16)$$

satisfaz o critério de Nyquist para bases ortonormais.

A função  $\psi_{\mathcal{F}}(f)$  é chamada *função raiz de cosseno levantado*. O pulso correspondente  $\psi(t)$ , é chamado *resposta ao impulso de raiz de cosseno levantado*, e dado por

$$\psi(t) = \frac{4\beta}{\pi \sqrt{T}} \frac{\cos \left[ (1+\beta) \pi \frac{t}{T} \right] + \frac{(1-\beta)\pi}{4\beta} \operatorname{sinc} \left[ (1-\beta) \frac{t}{T} \right]}{1 - (4\beta \frac{t}{T})^2}. \quad (17)$$

Essa função é real, par e tem suporte infinito. Na prática, tal pulso deve ser truncado para ter duração finita e deve ser atrasado para ser causal.

O parâmetro  $\beta \in ]0, 1[$  é chamado *fator de roll-off*. Quanto maior for, mais rápido será o decaimento do pulso  $\psi(t)$ . Os gráficos de (16) e de (17) são mostrados na Fig. 9 para  $\beta = \frac{1}{2}$ .

### E. Diagrama de olho

Seja  $\{\psi(t - jT)\}_{j \in \mathbb{Z}}$  conjunto ortonormal. A função de autossimilaridade  $R_{\psi}(\tau)$  de  $\psi(t)$  satisfaz

$$R_{\psi}(iT) = \begin{cases} 1, & i = 0, \\ 0, & i \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}. \end{cases}$$

Considere um sinal sem ruído  $w(t) = \sum_i s_i \psi(t - iT)$ . Ao passar por um filtro casado de resposta impulsional  $\psi^*(-t)$ , esse sinal produz a saída ideal

$$y(t) = w(t) \star \psi^*(t) = \sum_i s_i R_{\psi}(t - iT),$$

de forma que  $y(jT) = s_j$ .

<sup>6</sup>Onde o limite em média (*limit in mean*)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=-n}^n f(x) = g(x) \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-n}^n |f(x) - g(x)|^2 dx = 0$$

é o limite na norma  $\mathcal{L}_2$

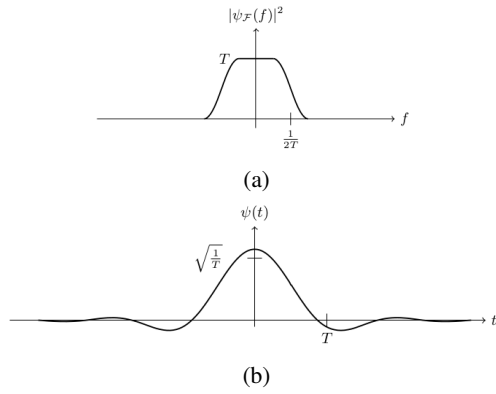


Figura 9: (a) Gráfico de (16) e (b) de (17) para  $\beta = \frac{1}{2}$ .

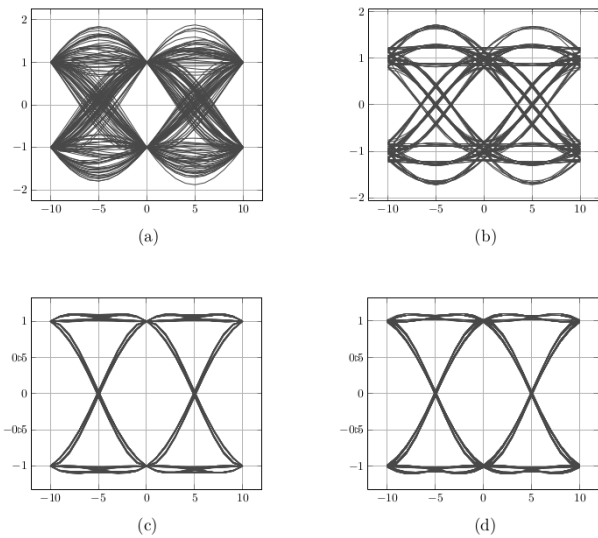


Figura 10: Diagramas de olho de  $\sum_i s_i R_\psi(t - iT)$  para  $s_i \in \{\pm 1\}$  e pulso raiz de cosseno levantado com  $T = 10$ .  $\beta = 0.25$  para (a) e (b) e  $\beta = 0.9$  para (c) e (d). O pulso é truncado em  $20T$  para (a) e (c) e em  $4T$  para (b) e (d).

Em condições reais, no entanto, a saída observada é tal que

$$y(jT) = \sum_i s_i R_\psi((j-i)T) = s_j + \underbrace{\sum_{i \neq j} s_i R_\psi((j-i)T)}_{\tilde{s}_j}$$

O termo  $\tilde{s}_j \neq 0$  caracteriza *interferência intersimbólica*. Isso se deve a dois principais motivos: 1) os sinais  $\psi(t - iT)$  podem não ser ortogonais (por exemplo, se truncados); e 2) a amostragem pode não ser feita nos instantes adequados.

O *diagrama de olho* é uma técnica que permite avaliar a interferência intersimbólica em um sistema. Seja  $y(t) = \sum_i s_i R_\psi(t - iT)$ . A técnica consiste em traçar  $y(t - iT)$  para diferentes valores de  $i \in \mathbb{Z}$  e  $t \in [-T, T]$ . Um exemplo é apresentado na Fig. 10, em que  $s_i \in \{\pm 1\}$ .

Observamos que:

- Só há interferência intersimbólica em (b), pois, em  $t = 0$ , as curvas passam por diferentes valores, além de  $\pm 1$ .

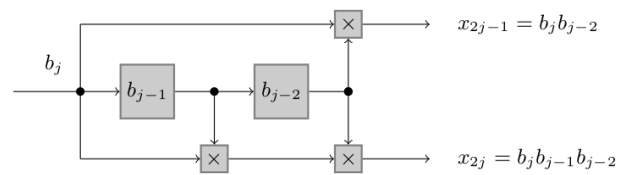


Figura 11: Codificador convolucional.

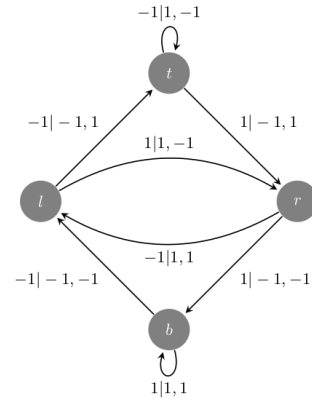


Figura 12: Diagrama de estados, onde  $t = (-1, 1)$ ,  $l = (-1, 1)$ ,  $r = (1, -1)$ ,  $b = (1, 1)$ . As transições são rotuladas  $b_j | x_{2j-1}, x_{2j}$ .

- A abertura horizontal do diagrama indica maior imunidade a erro de temporização (alcançada com maior  $\beta \rightarrow$  decaimento mais rápido de  $\psi(t)$ ).
- A abertura vertical do diagrama indica maior imunidade a ruído (alcançada com truncamento menos agressivo).

## 5. CÓDIGOS CONVOLUCIONAIS

O estudo de métodos de codificação e decodificação é uma área por si só (teoria de códigos). Neste capítulo, tratamos de um exemplo de técnica: códigos convolucionais.

### A. Codificador

O codificador é alimentado com uma sequência de símbolos de fonte  $(b_1, \dots, b_k) \in \{\pm 1\}^k$  e produz uma sequência  $(x_1, \dots, x_n) \in \{\pm 1\}^n$ . Um exemplo de codificação é

$$\begin{aligned} x_{2j-1} &= b_j b_{j-2} \\ x_{2j} &= b_j b_{j-1} b_{j-2}, \end{aligned}$$

onde assumimos  $b_0 = b_{-1} = 1$ . O circuito que implementa essa regra de codificação e o diagrama de estados  $(b_j, b_{j-1})$  correspondente são representados nas Fig. 11 e 12, respectivamente.

Note apenas  $2^k$  das  $2^n$  possíveis sequências são palavras-código, com  $n = 2k$ . A codificação (de canal) consiste em adicionar redundância na esperança de diminuir probabilidade de erro.

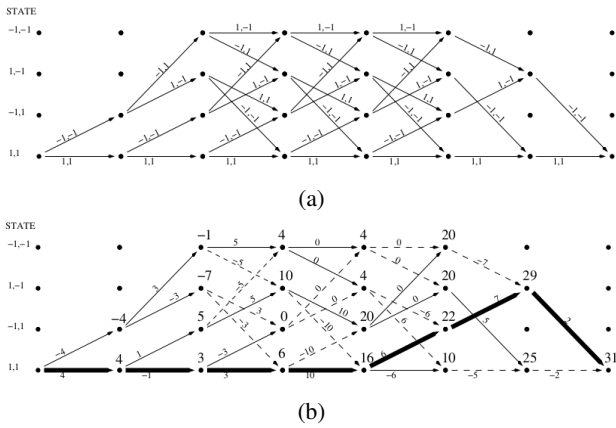


Figura 13: Exemplo de treliça com (a) representação das transições, e cálculo das métricas para determinação do caminho sobrevivente.

### B. Decodificador

O decodificar ML consiste em determinar a sequência  $x = (x_1, \dots, x_n)$  que maximiza  $\langle c, y \rangle - \|c\|^2/2$ , com  $c = \sqrt{\mathcal{E}_s}x$ , o que é equivalente a maximizar

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

O método força bruta é impraticável, pois tem complexidade exponencial em  $k$ . O *algoritmo de Viterbi*, por outro lado, permite resolver a maximização em tempo linear. Ele se baseia no princípio da programação dinâmica: *soluções ótimas só podem ser formadas por soluções parciais ótimas*.

A *treliça* (Fig. 13) é uma representação das transições de estados ao longo do tempo. Cada aresta corresponde à transição do estado  $j$  para  $j + 1$  com entrada do bit  $b_j$  e saída  $x_{2j-1}, x_{2j}$ . Consideramos que a sequência termina com bits conhecidos  $b_{k-1} = b_k = 1$  (*dummy bits*). O algoritmo de Viterbi consiste em:

- 1) Construir a treliça, representando todas as transições possíveis.
- 2) Calcular as métricas parciais  $x_{2j-1}y_{2j-1} + x_{2j}y_{2j}$  de cada transição.
- 3) Para cada possível estado, manter apenas os caminhos de maior métrica (soma das métricas das transições até ele).
- 4) Escolher os bits correspondentes ao *caminho sobrevivente*.

### C. Probabilidade de erro

O cálculo da probabilidade de erro de bit  $P_b$  obtida com códigos convolucionais e decodificação com o algoritmo de Viterbi consiste em estabelecer um *caminho de referência* na treliça e calcular a probabilidade de *desvios* desse caminho. Seja  $\omega_j$  o número de erros de bit produzidos por um desvio do caminho de referência no estágio  $j$  da treliça e  $\Omega_j$  a v.a. correspondente. Então, para uma sequência de  $k$  bits (estágios na treliça), a probabilidade de erro é calculada como

$$P_b = \frac{1}{kk_0} \sum_{j=0}^{k-1} \mathbb{E}[\Omega_j], \quad (18)$$

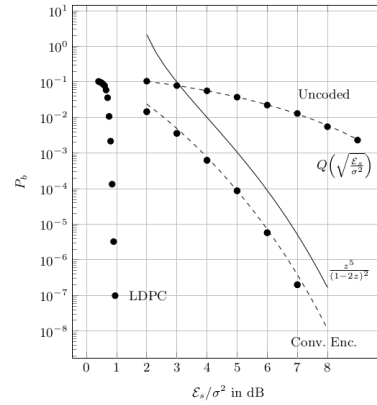


Figura 14: Probabilidade de erro de bit.

onde  $k_0$  é o número de bits que entram no decodificador em cada estágio. No código apresentado na Seção 5-A,  $k_0 = 1$ . É possível encontrar um limitante superior para  $P_b$  [1, Seção 6.4].

**Exemplo 5.1.** Para o código apresentado na Seção 5-A,

$$P_b \leq \frac{z^5}{(1-2z)^2},$$

onde  $z = e^{-\frac{\mathcal{E}_s}{2\sigma^2}}$ .  $\triangle$

### D. Análise de performance

A Tabela I apresenta a comparação de alguns parâmetros para um esquema codificado com códigos convolucionais e um esquema não codificado.

Tabela I: Comparação entre esquemas de codificação.

	Código convolucional	Não codificado
Taxa por bit	$R_b = \frac{R_s}{2} = \frac{1}{2T}$	$R_b = R_s = \frac{1}{T}$
Energia por bit	$\mathcal{E}_b = 2\mathcal{E}_s$	$\mathcal{E}_b = \mathcal{E}_s$
Probabilidade de erro	$P_b \leq \frac{z^5}{(1-2z)^2}$	$P_b = Q\left(\sqrt{\frac{\mathcal{E}_s}{\sigma^2}}\right)$

Uma maneira usual de comparar esquemas de codificação é através de um gráfico de probabilidade de erro  $P_b$  versus SNR  $\mathcal{E}_s/\sigma^2$  em dB. A Fig. 14 mostra um exemplo, que inclui resultados simulados (pontos) e resultados ou limitantes teóricos (curvas tracejadas). Além dos esquemas não codificado e codificado com código convolucional, inclui também o resultado para códigos LDPC (*low-density parity-check*), que são o estado da arte em codificação.

Note o ganho proporcionado com o uso de codificação: para uma mesma probabilidade de erro, a relação sinal-ruído necessária para obtê-la é menor com o uso de codificação; ou, equivalentemente, fixado um valor de SNR, a probabilidade de erro é menor em esquemas codificados.

O código LDPC apresentado tem a mesma taxa  $R_b = R_s/2$  do código convolucional, i.e., 2 bits/símbolo. Mas não é verdade que o uso de codificação requer diminuir a taxa de bits (ou aumentar a largura de banda). Bastaria, por exemplo, considerar um alfabeto quaternário em vez de binário.

O limitante fundamental para a taxa de comunicação confiável é atribuído a Shannon. É possível atingir uma probabilidade de erro arbitrariamente pequena (com o uso de codificação), desde que a taxa de transmissão (bits/símbolo) não ultrapasse a *capacidade do canal*  $C$ , que, para o canal AWGN discreto, é

$$C = \frac{1}{2} \log_2 \left( 1 + \frac{\mathcal{E}_s}{\sigma^2} \right) \text{ [bits/símbolo]}.$$

## 6. COMUNICAÇÃO EM BANDA PASSANTE: TERCEIRA CAMADA

Chamamos comunicação em *banda base* quando os sinais têm sua energia concentrada em algum intervalo de frequências  $[-B, B]$  em torno da origem. Por outro lado, na comunicação em *banda passante*, os sinais têm sua energia em um intervalo  $[f_c - B, f_c + B]$  em torno de uma *frequência portadora*  $f_c > B$ .

### A. Equivalente em banda base de um sinal em banda passante

Considere um sinal real  $x(t)$ . Sua transformada de Fourier tem informação redundante, pois apresenta simetria conjugada:

$$x_{\mathcal{F}}^*(f) := (x_{\mathcal{F}})^*(f) = x_{\mathcal{F}}(-f).$$

O seu *equivalente analítico*  $\hat{x}(t)$  é a versão do sinal sem componentes de frequência negativas. Especificamente, seja o filtro cuja resposta ao impulso  $h(t)$  tem transformada de Fourier

$$h_{\mathcal{F}}(f) = \begin{cases} 1, & f \geq 0, \\ 0, & f < 0. \end{cases}$$

Então<sup>7</sup>

$$\hat{x}(t) = \sqrt{2}(x(t) \star h(t)), \quad (19)$$

$$\hat{x}_{\mathcal{F}}(f) = \sqrt{2}(x_{\mathcal{F}}(f)h_{\mathcal{F}}(f)). \quad (20)$$

O *equivalente em banda base*  $x_E(t)$ , com respeito à frequência portadora  $f_c$ , é obtido por uma translação no espectro:

$$x_E(t) = \hat{x}(t)e^{-j2\pi f_c t}, \quad (21)$$

$$x_{E,\mathcal{F}}(f) = \hat{x}_{\mathcal{F}}(f + f_c). \quad (22)$$

É possível recuperar o sinal original usando

$$x(t) = \sqrt{2}\Re\{\hat{x}(t)\} = \sqrt{2}\Re\{x_E(t)e^{j2\pi f_c t}\}.$$

As relações entre as transformadas de Fourier de  $x(t)$ ,  $\hat{x}(t)$  e  $x_E(t)$  são ilustradas na Fig. 15.

### B. A terceira camada

A terceira camada é projetada de forma que a escolha da frequência portadora não interfira nas outras camadas. Nesta camada, o transmissor é constituído pelo formador de forma de onda e pelo conversor para altas frequências (*up-converter*). Já o receptor é formado pelo conversor para baixas frequências (*down-converter*) e pelo formador de  $n$ -uplas (Fig. 16).

<sup>7</sup>O fator  $\sqrt{2}$  se deve ao fato de que, ao remover as frequências negativas do sinal, diminuímos sua energia pela metade.

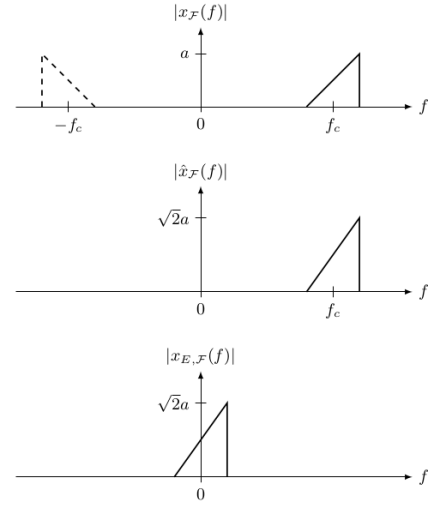


Figura 15: Relação entre as transformadas de Fourier de  $x(t)$ ,  $\hat{x}(t)$  e  $x_E(t)$ .

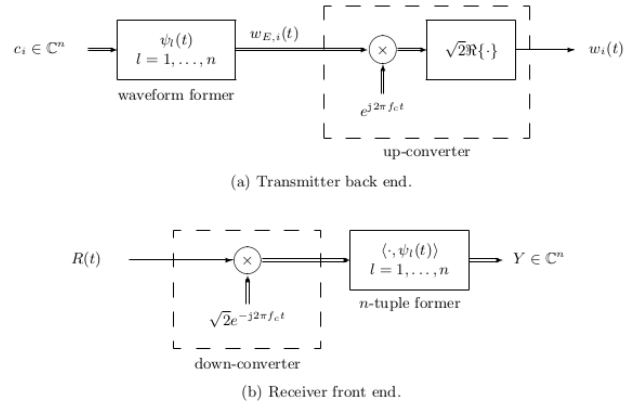


Figura 16: Diagrama de blocos geral da terceira camada.

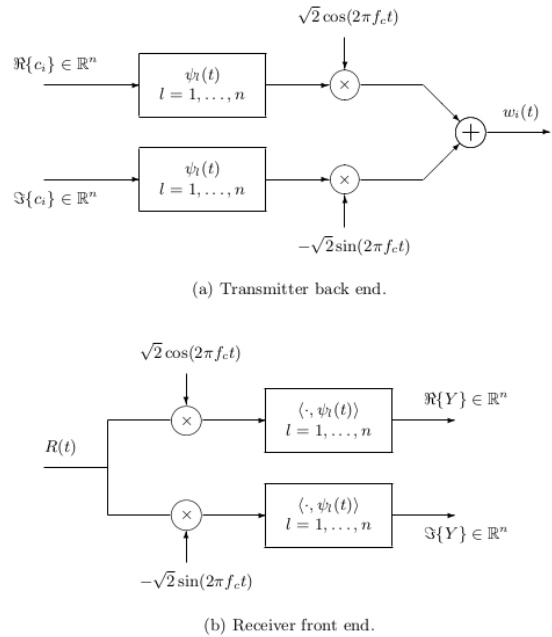


Figura 17: Diagrama de blocos da terceira camada para o caso em que os sinais equivalentes em banda base são reais.



Note que a constelação de sinais equivalentes em banda base  $\{w_{E,i}(t), \dots, w_{E,n}(t)\}$  é, em geral, complexa. Quando ela é real, o diagrama de blocos pode ser simplificado (Fig. 17).

O formalismo apresentado para as outras camadas continua válido se consideramos sinais e vetores complexos. Em particular, sob hipótese  $H = i$ , o receptor do canal em tempo discreto observa  $Y = c_i + Z$ , onde o vetor aleatório  $Y \in \mathbb{C}^n$  tem distribuição gaussiana complexa de média  $c_i$  e variância  $N_0$  em cada componente complexa, i.e.,  $Y \sim \mathcal{CN}(c_i, N_0 I_n)$ . Nesse caso, a função de verossimilhança é escrita

$$f_{Y|H}(y|i) = \frac{1}{(\pi N_0)^n} \exp\left(-\frac{\|y - c_i\|^2}{N_0}\right)$$

e o receptor ML decide por

$$\hat{H}_{\text{ML}} = \arg \min_{i \in \mathcal{H}} \|y - c_i\|.$$

#### REFERÊNCIAS

- [1] B. Rimoldi, *Principles of Digital Communication: A Top-Down Approach*. Cambridge University Press, 2016.