Exercícios: semana 1

EE881 – Princípios de Comunicações I

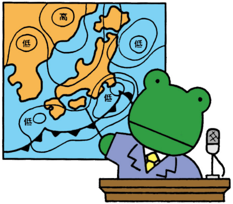
1º semestre 2022

Exercício 2.2 (*Wetterfrosch*)

Considere um “sapo do tempo” que baseia sua previsão do tempo de amanhã inteiramente na pressão do ar de hoje. Determinar a previsão do tempo é um problema de teste de hipóteses.

Por simplicidade, suponhamos que o sapo do tempo só precisa nos dizer se a previsão para amanhã é tempo “ensolarado” ou “chuvoso”.

Eis, portanto, um teste de hipóteses binário. Denote por $H = 0$ “ensolarado” e por $H = 1$ “chuvoso”. Vamos assumir que ambos os valores de H são igualmente prováveis, i.e., $P_H(0) = P_H(1) = \frac{1}{2}$.



Para esse exercício, suponha que, na véspera de um dia ensolarado, a pressão do ar pode ser modelada como uma variável aleatória Y com função densidade de probabilidade

$$f_{Y|H}(y|0) = \begin{cases} A - \frac{A}{2}y, & 0 \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Similarmente, em um dia que precede um dia chuvoso, a pressão do ar é distribuída de acordo com

$$f_{Y|H}(y|1) = \begin{cases} B + \frac{B}{3}y, & 0 \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

O propósito de vida do sapo do tempo é adivinhar o valor de H após medir Y.

(a) Determine A e B.

(b) Encontre as probabilidades *a posteriori* $P_{H|Y}(0|y)$ e $P_{H|Y}(1|y)$.

(c) Mostre que a implementação da regra de decisão $\hat{H}(y) = \arg\max_i P_{H|Y}(i|y)$ se reduz a

$$\hat{H}_\theta(y) = \begin{cases} 0, & y \leq \theta, \\ 1, & \text{caso contrário}, \end{cases}$$

para algum limiar θ, e especifique o valor do limiar.

(d) Suponha agora que o meteorologista nada sabe sobre teste de hipóteses e arbitrariamente escolhe uma regra decisão

$$\hat{H}_\gamma(y) = \begin{cases} 0, & y \leq \gamma, \\ 1, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

para algum $\gamma \in \mathbb{R}$. Determine, como função de γ, as probabilidades $\Pr\{\hat{H} = 1 | H = 0\}$ e $\Pr\{\hat{H} = 0 | H = 1\}$.

(e) Para a mesma regra de decisão, determine a probabilidade de erro $P_e(\gamma)$ como função de γ.

(f) Usando cálculo, encontre o valor de γ que minimiza $P_e(\gamma)$ e compare esse valor com θ.

Interlúdio: o mito do *Wetterfrosch*

The word 'Wetterfrosch' (weather frog or weatherman) has two meanings which both stem from one myth.

The first and literal definition translates to weather frog, and directly originates from the idea that European tree frogs can predict the weather because they climb up plants as the sun starts to emerge. This occurs not because frogs can predict the weather, but because these ambitious amphibians are in search of insects for food, who tend to fly higher in the air when the weather is warmer.

Nevertheless, this leads to some people holding tree frogs inside jars with a built-in latter, hoping for their position on the ladder to forecast the weather. The further the frog climbs ladder, the better the weather will be. On the contrary, the closer he stays to the ground, the worse the weather is likely to be.

The second meaning refers to a meteorologist (weatherman) or a person who is interested in the weather, and therefore is similar to the weather frog.

https://www.thelocal.ch/20191120/german-word-of-the-day-der-wetterfrosch/

Exercício 2.3 (Teste de hipóteses com ruído laplaciano)

Considere o seguinte problema de teste de hipóteses entre duas hipóteses igualmente prováveis. Sob a hipótese $H = 0$, o observável Y é igual a $a + Z$, onde Z é uma variável aleatória com distribuição laplaciana

$$f_Z(z) = \frac{1}{2} e^{-|z|}.$$

Sob a hipótese $H = 1$, o observável é dado por $-a + Z$. Podemos assumir que $a > 0$.

(a) Encontre e esboce a densidade $f_{Y|H}(y|0)$ do observável sob hipótese $H = 0$, e a densidade $f_{Y|H}(y|1)$ do observável sob hipótese $H = 1$.

(b) Encontre a regra de decisão que minimiza a probabilidade de erro.

(c) Calcule a probabilidade de erro da regra de decisão ótima.

Exercício 2.1 (Teste de hipóteses: uniforme e uniforme)

Considere um problema de teste de hipóteses binário em que as hipóteses $H = 0$ e $H = 1$ ocorrem com probabilidades $P_H(0)$ e $P_H(1) = 1 - P_H(0)$, respectivamente. O observável Y toma valores em $\{0, 1\}^{2k}$, para algum $k \in \mathbb{N}^*$ fixo. Quando $H = 0$, cada componente de Y é 0 ou 1 com probabilidade $\frac{1}{2}$ e as componentes são independentes. Quando $H = 1$, Y é escolhido aleatória e uniformemente do conjunto de todas as sequências de comprimento $2k$ que têm a mesma quantidade de zeros e uns. Existem $\binom{2k}{k}$ tais sequências.

(a) Qual é $P_{Y|H}(y|0)$? Qual é $P_{Y|H}(y|1)$?

(b) Encontre a regra de decisão de máxima verossimilhança para H com base em y. Qual é o único número que você precisa saber sobre y para implementar essa regra de decisão?

(c) Encontre a regra de decisão que minimiza a probabilidade de erro.

(d) Há valores de $P_H(0)$ tais que a regra de decisão que minimiza a probabilidade de erro sempre escolhe pela mesma hipótese, independentemente de y? Se sim, quais são esses valores, e qual é a decisão?