Exercícios: semana 7

EE881 – Princípios de Comunicações I

1º semestre 2022

Exercício 4.5 (Bit a bit em um trem de pulsos)

Um sistema de comunicações usa bit a bit em um trem de pulsos para comunicar a 1 Mbps usando um pulso retangular. O sinal transmitido é da forma

$$\sum_j B_j \mathbb{1}_{[jT_s,(j+1)T_s[}(t),$$

onde $B_j \in \{\pm b\}$. Determine o valor de b necessário para atingir probabilidade de erro de bit $P_b = 10^{-5}$, sabendo que o canal corrompe o sinal transmitido com ruído aditivo gaussiano branco de densidade espectral de potência $N_0/2 = 10^{-2}$ W/Hz.

Prelúdio: capacidade do canal

Vimos:

- Dada uma constelação $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$ com m palavras-código, definimos $k := \log_2 m$ o número de bits transmitido por símbolo (taxa).
- Podemos calcular sua energia por símbolo $\mathcal{E}_s$ ou por bit $\mathcal{E}_b$.
- Estamos interessados em avaliar sua probabilidade de erro P_e quando $k \to \infty$.

Prelúdio: capacidade do canal

Vimos:

- Dada uma constelação $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$ com m palavras-código, definimos $k := \log_2 m$ o número de bits transmitido por símbolo (taxa).
- Podemos calcular sua energia por símbolo $\mathcal{E}_s$ ou por bit $\mathcal{E}_b$.
- Estamos interessados em avaliar sua probabilidade de erro P_e quando $k \to \infty$.

Pergunta: fixado um valor de $\mathcal{E}_s$, é possível transmitir uma taxa k com probabilidade de erro arbitrariamente pequena?

Prelúdio: capacidade do canal

Vimos:

- Dada uma constelação $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$ com m palavras-código, definimos $k := \log_2 m$ o número de bits transmitido por símbolo (taxa).
- Podemos calcular sua energia por símbolo $\mathcal{E}_s$ ou por bit $\mathcal{E}_b$.
- Estamos interessados em avaliar sua probabilidade de erro P_e quando $k \to \infty$.

Pergunta: fixado um valor de $\mathcal{E}_s$, é possível transmitir uma taxa k com probabilidade de erro arbitrariamente pequena?

Resposta: sim!, desde que a taxa k esteja abaixo da *capacidade do canal*. A capacidade do canal é, portanto, a maior taxa em que é possível realizar comunicação confiável, i.e., com $P_e \to 0$.

Exercício 4.17 (Eficiência energética do PAM)

Considere a constelação m-PAM: $\{\pm a, \pm 3a, \ldots, \pm(m-1)a\}$ para comunicação por um canal AWGN em tempo discreto de variância de ruído $\sigma^2 = 1$. Nosso objetivo é comunicar com confiabilidade, digamos, com $P_e = 10^{-5}$. Queremos comparar a energia requerida pelo PAM com a energia requerida por um sistema que opera à capacidade do canal, i.e., a uma taxa $C = \frac{1}{2}\log_2(1 + \frac{\mathcal{E}_s}{\sigma^2})$ bits por uso do canal.

(a) Usando a fórmula da capacidade, determine a energia por símbolo $\mathcal{E}_s^{\mathrm{C}}(k)$ necessária para transmitir k bits por uso do canal. A qualquer taxa abaixo da capacidade, é possível tornar a probabilidade de erro arbitrariamente pequena ao aumentar o comprimento das palavras-código. Isso implica que há uma forma de atingir a probabilidade de erro desejada com uma energia por símbolo $\mathcal{E}_s^{\mathrm{C}}(k)$.

Exercício 4.17 (Eficiência energética do PAM)

(b) Usando *single-shot* m-PAM, podemos tornar $P_e \to 0$ fazendo $a \to \infty$. Com o aumento do tamanho m da constelação, os efeitos de borda tornam-se desprezíveis e a probabilidade de erro média se aproxima de $2Q(\frac{a}{\sigma})$ (por quê?). Encontre o valor numérico do parâmetro a para o qual $2Q(\frac{a}{\sigma}) = 10^{-5}$. [Dica: use a aproximação $Q(x) \approx \frac{1}{2}\exp(-\frac{x^2}{2})$.]

(c) Tendo fixado o valor de a, podemos usar $\mathcal{E} = \frac{a^2(m^2-1)}{3}$ (cf. Exemplo 4.3) para determinar a energia média $\mathcal{E}_s^{\mathrm{PAM}}(k)$ de que o PAM necessita para enviar k bits à probabilidade de erro desejada. Encontre valores numéricos de $\mathcal{E}_s^{\mathrm{C}}(k)$ e $\mathcal{E}_s^{\mathrm{PAM}}(k)$ para $k \in \{1, 2, 4\}$.

(d) Encontre $\lim_{k\to\infty} \frac{\mathcal{E}_s^{\mathrm{C}}(k+1)}{\mathcal{E}_s^{\mathrm{C}}(k)}$ e $\lim_{k\to\infty} \frac{\mathcal{E}_s^{\mathrm{PAM}}(k+1)}{\mathcal{E}_s^{\mathrm{PAM}}(k)}$.

(e) Comente a eficiência do PAM em termos da energia por bit para valores de k pequenos e grandes.

Exercício 4.17 (Eficiência energética do PAM)