Exercícios: semana 8

EE881 – Princípios de Comunicações I

1º semestre 2022

Revisão: processos estocásticos

Um *processo estocástico* é uma coleção de variáveis aleatórias $\{X_t\}_{t \in T}$ indexadas pelo tempo t. Pode ser a tempo discreto ($T = \mathbb{Z}$) ou a tempo contínuo ($T = \mathbb{R}$).

Definimos a *média* $m_X(t) := \mathbb{E}[X_t]$ e a *autocorrelação* $K_X(s,t) := \mathbb{E}[X_s X_t^*]$ do processo X_t.

Um processo é dito *WSS (wide sense stationary)* se a média é constante e a autocorrelação só depende de $\tau := s - t$; nesse caso, escrevemos $K_X(\tau) := K_X(t + \tau, t)$.

Revisão: processos estocásticos

A *densidade espectral de potência (PSD)* $S_X(f)$ de um processo X_t, de média nula e WSS, é a transformada de Fourier da sua autocovariância, i.e.,

$$S_X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} K_X(t) e^{\mathrm{j}2\pi f t} \, \mathrm{d}t.$$

Para um processo da forma $X(t) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} X_i \xi(t - iT - \Theta)$, com $\{X_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ de média nula e WSS, $\xi(t)$ uma função $\mathcal{L}_2$ (quadrado-integrável) e $\Theta \sim \mathcal{U}([0, T[)$, a densidade espectral de potência é da forma

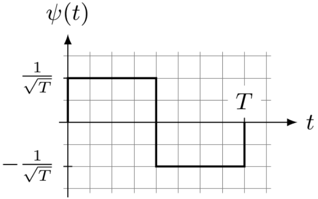
$$\boxed{S_X(f) = \frac{|\xi_{\mathcal{F}}(f)|^2}{T} \sum_{k \in \mathbb{Z}} K_X[k] e^{-\mathrm{j}2\pi k f T}.}$$

Exercício 5.4 (Espectro de potência: pulso de Manchester)

Derive a densidade espectral de potência do processo estocástico

$$X(t) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} X_i \psi(t - iT - \Theta),$$

onde $\{X_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ é uma sequência iid de variáveis aleatórias uniformemente distribuídas em $\{\pm\sqrt{\mathcal{E}}\}$, Θ é uniformemente distribuído em $[0, T]$, e $\psi(t)$ é o pulso de Manchester, mostrado abaixo.



Revisão: critério de Nyquist para bases ortonormais

Teorema (Nyquist)

Seja $\psi(t)$ uma função $\mathcal{L}_2$. O conjunto $\{\psi(t-iT)\}_{i\in\mathbb{Z}}$ é um conjunto ortonormal se, e somente se,

$$\operatorname*{l.\,i.\,m.}_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} \left|\psi_{\mathcal{F}}\left(f-\frac{k}{T}\right)\right|^2 = T.$$

Observação:

$$\begin{aligned}\operatorname*{l.\,i.\,m.}_{n\to\infty} f_n(x) = g(x) &\iff \lim_{n\to\infty} \|f_n(x)-g(x)\| = 0 \\ &\iff \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f_n(x)-g(x)|^2 \,\mathrm{d}x = 0.\end{aligned}$$

Exercício 5.5 (Critério de Nyquist)

Para cada função $|\psi_{\mathcal{F}}(f)|^2$, indique se o pulso correspondente $\psi(t)$ tem norma unitária e/ou é ortogonal a seus deslocamentos temporais de múltiplos de T. A função em (d) é $\text{sinc}^2(fT)$.