ET520 – Princípios de Conversão de Energia

Henrique K. Miyamoto

Sumário

1 Circuitos magnéticos

1.1 Circuitos magnéticos

Lei de Ampère:

$$\boxed{\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \sum i}$$

Aplicação a um condutor no espaço. Escolha um caminho circular de raio r.

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = Hl = H(2\pi r) = i \Rightarrow H = \frac{i}{2\pi r}$$

Força magnetomotriz (F_{mm})[1]:

$$\boxed{F_{mm} \equiv Ni}$$

Aviso: este material não foi revisado e pode conter erros. Em caso de dúvidas, consulte a fonte original. Não reclamo direitos autorais sobre as figuras usadas.

[1] Unidade: Ampère-espira (Ae).

Lei de Faraday[2]:

$$\boxed{\varepsilon(t) = -\frac{d\phi(t)}{dt}}$$

Fluxo concatenado: fluxo envolvido por uma bobina (com N espiras).

$$\boxed{\lambda(t) = N\phi(t)}$$

Relação $\mathbf{B} \times \mathbf{H}$:

1. Materiais lineares:

$$\boxed{\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}},\ \mu = \mu_0\mu_r,\ \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} H/m$$

2. Materiais não-lineares:

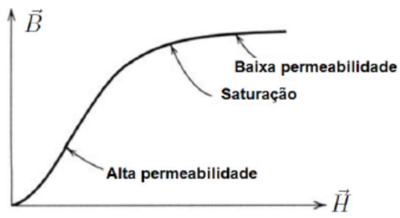

Figura 1: Curva de magnetização para material não-linear.

Exemplo: núcleo toroidal de material linear

$$H = \frac{Ni}{l},\ B = \mu H = \mu\frac{Ni}{l},\ \phi = BA$$

$$\phi = BA = \mu\frac{Ni}{l}A \Rightarrow F_{mm} = \frac{l}{\mu A}\phi$$

Relutância ($\mathcal{R}$) e permeância ($\mathcal{P}$):

$$\boxed{\mathcal{R} = \frac{l}{\mu A}[H^{-1}],\ \mathcal{P} = \frac{1}{\mathcal{R}} = \frac{\mu A}{l}[H]}$$

$$F_{mm} = \mathcal{R}\phi$$

Análise de circuitos magnéticos com entreferros (estrutura composta):

1. Considerações:
   - ϕ é constate ao longo do núcleo
   - $\mathbf{B}$ pode ser diferente em pontos do núcleo
   - $\mathbf{H}$ varia em função da permeabilidade do meio
   - F_{mm} permanece constante para mesma corrente e número de espiras

2. Características do entreferro:
   - Permeabilidade do ar
   - Comprimento dado pelo seu tamanho
   - Área de passagem um pouco maior devido ao efeito de espraiamento (*fringing*)
   - Se o comprimento do entreferro for pequeno, essa diferença de área pode ser desprezada.

[2] O sinal negativo deve-se à lei de Lenz e é coerente com a convenção de fonte.

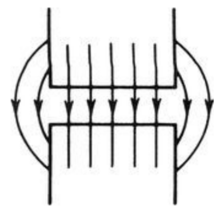

Figura 2: Efeito de espraiamento (*fringing*).

3. Conclusões:

   No *gap*, a intensidade de campo magnético e a relutância são maiores que no núcleo.

   Para materiais lineares, é possível fazer uma analogia com circuitos elétricos com relações do tipo

$$F_{mm} = \mathcal{R}\phi, \ \mathcal{R} = \frac{l}{\mu A}$$

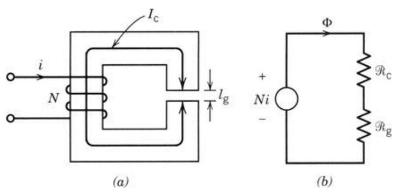

Figura 3: Circuito magnético análogo ao elétrico.

Análise de circuitos magnéticos não-lineares:

1. Se B ou H são conhecidos: consultar a curva $B \times H$
2. Se B e H são desconhecidos: determinar uma relação entre B e H a partir dos dados do problema e identificar sua interseção com a curva do material.

Indutância:

$$\boxed{L = \frac{\lambda}{i}[H]}$$

Relação entre indutância e relutância[3]:

$$L = \frac{\lambda}{i} = \frac{(N\phi)}{i} = \frac{N(BA)}{i} = \frac{N(\mu H)A}{i} = \frac{N\mu A}{i}\left(\frac{Ni}{l}\right) = N^2\frac{\mu A}{l} \Rightarrow \boxed{L = \frac{N^2}{\mathcal{R}}}$$

Em circuitos magnéticos com mais de uma bobina, é possível diferenciar:

- *Indutância própria ou autoindutância*: razão entre fluxo concatenado em uma bobina e a corrente aplicada a ela para gerar o fluxo.
- *Indutância mútua*: razão entre o fluxo concatenado em uma bobina, que foi gerado por outra bobina, e a corrente, fornecida pela outra bobina, que gerou tal fluxo.

Circuito elétrico equivalente:

- A tensão em uma bobina é dada por[4][5]

$$e = -\frac{d\lambda}{dt} = -\frac{d}{dt}(Li) = -\left(L\frac{di}{dt} + i\cancel{\frac{dL}{dt}}\right) = -L\frac{di}{dt}$$

[3]Válido para materiais lineares. Em materiais não-lineares, é possível definir duas indutâncias: saturada e não-saturada.
[4]Em materiais lineares, L é constante.
[5]O sinal negativo deve-se à convenção de gerador.

- O condutor da bobina tem uma resistividade. A resistência da bobina deve ser considerada no circuito equivalente.

$$R = \rho \frac{l}{A}$$

Portanto a tensão no circuito equivalente da bobina é

$$\boxed{e = Ri + L\frac{di}{dt}}$$

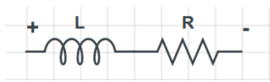

Figura 4: Circuito elétrico equivalente da bobina.

1.2 Histerese

Detalhes sobre magnetização:

- Momentos magnéticos são gerados por fenômenos de nível atômico: movimento orbital de elétrons e spin de elétrons.
- Poucos materiais são *ferromagnéticos*, i.e., o arranjo dos átomos permite haver momento magnético resultante. Ex.: Fe, Ni, Co, Dy, Gd.
- Os átomos de mesma orientação se agrupam em regiões chamadas *domínios magnéticos*. A aplicação de um campo magnético tende a aumentar os domínios em sua direção.
- Com o alinhamento dos domínios magnéticos, os elétrons dos domínios geram campo na mesma direção, aumentando o efeito do campo.
- Quanto maior a intensidade do campo, menos domínios ficam disponíveis para se alinhar. No limite, todos os domínios estarão alinhados (saturação magnética) e o material se comporta como espaço livre.

Histerese é o fenômeno de que a densidade de fluxo magnético tem um "atraso" na resposta em relação à aplicação de campo magnético. Se um campo magnético que varia periodicamente (de H_1 a $-H_1$) é aplicado a um material, após alguns ciclos, o sistema atinge um regime e a curva $B \times H$ passa a seguir um padrão (*laço de histerese*).

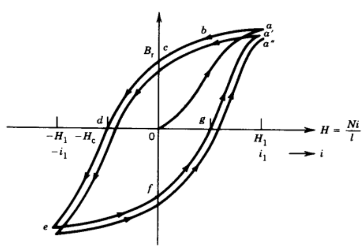

Figura 5: Laço de histerese.

- A curva de magnetização é definida como a ponta do laço de histerese em regime para vários valores de H_{max}.
- B_r: densidade de fluxo residual.
- H_c: campo magnético coercitivo.

- Curvas de histerese diferentes podem ser adequadas para aplicações específicas (ex.: liga Deltamax - relés).

A magnetização/desmagnetização envolve transferência de energia entre uma fonte externa e o núcleo magnético. Essa energia é dada por:

$$W = \int_{t_1}^{t_2} e(t)i(t)dt, \; e(t) = \frac{d\lambda}{dt}, \; i(t) = \frac{Hl}{N} \rightarrow \boxed{W = Vw, \; w = \int_{B_1}^{B_2} H(B)dB}.$$

Em um ciclo de histerese, existem etapas em que a energia é absorvida e dissipada. A *energia líquida é absorvida* é calculada como

$$w = \oint_{\text{laço}} H(B)dB.$$

A *potência dissipada devido à histerese* P_h depende da frequência de alimentação elétrica f segundo

$$\boxed{P_h = Vwf}.$$

Uma relação empírica válida é

$$\boxed{P_h = VK_hB_{max}^n f},$$

em que K_h e n dependem do material.

Perdas por correntes de Foucault (correntes parasitas) ocorrem da seguinte maneira: uma variação no fluxo magnético induz tensões entre pontos internos do material; como a resistividade não é nula, surgem correntes internas. Essa perda pode ser calculada como

$$\boxed{P_f = VK_fB_{max}^2 f^2},$$

em que K_f depende do material. Para reduzir essas perdas, pode-se: usar ligas com resistividade alta (acréscimo de Si); usar um núcleo formado por lâminas finas, isoladas eletricamente.

As perdas totais aquecem o núcleo e são calculadas como

$$P_t = P_h + P_f.$$

A FMM das correntes de Foucault se opõe à FMM do núcleo. Para a fonte manter o fluxo magnético, a corrente no núcleo deve ser aumentada, o que aumenta a área do laço de histerese (laço dinâmico).

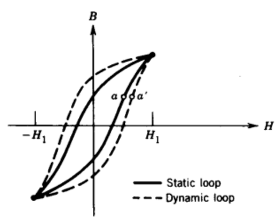

Figura 6: Laço de histerese.

1.3 Excitação senoidal

Considere um fluxo magnético senoidal em um núcleo magnético. Vejamos a relação com a tensão induzida.

$$\phi(t) = \phi_{max} \sin(\omega t) = \phi_{max} \sin(2\pi f t)$$

$$e(t) = N\frac{d\phi}{dt} = N\phi_{max}\omega \cos(\omega t)$$

$$e_{max} := N\phi_{max}\omega \rightarrow e(t) = e_{max} \cos(\omega t)$$

$$e_{rms} = \frac{e_{max}}{\sqrt{2}} = \pi\sqrt{2}N\phi_{max}f \approx 4,44Nf\phi_{max}$$

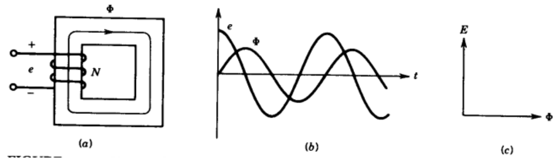

Figura 7: Excitação senoidal. (a) Montagem bobina-núcleo. (b) Formas de onda. (c) Diagrama fasorial.

- Em materiais lineares, a corrente está em fase com o fluxo.

$$e(t) = N\frac{d\phi}{dt} \Rightarrow \phi(t) = \frac{\int e(t)dt}{N} = \frac{\int e_{max}\sin(\omega t)dt}{N} = \frac{-e_{max}\cos(\omega t)}{N\omega}$$

$$H = \frac{Ni}{l} \Rightarrow i(t) = \frac{H(t)l}{N} = \frac{B(t)l}{\mu N} = \frac{\phi(t)l}{\mu NA} = \frac{-e_{max}\cos(\omega t)\mathcal{R}}{\omega N^2} \Rightarrow i(t) = -\frac{e_{max}\cos(\omega t)}{L\omega}$$

- A corrente está atrasada de 90º em relação à tensão, na notação de receptor (comportamento indutivo).

Uma mudança de eixos na curva de magnetização ($B \to \phi = BA$ e $H \to i = Hl/N$) transforma a curva de saturação do material na curva de saturação de um núcleo magnético específico.

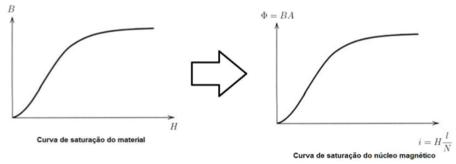

Figura 8: Mudança de eixos na curva de magnetização.

Corrente de excitação **sem** perdas no núcleo:

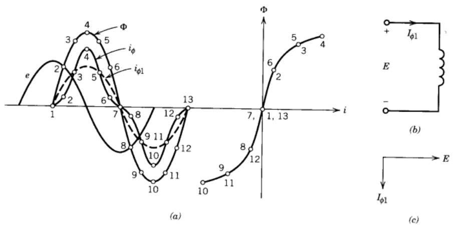

Figura 9: Corrente de excitação sem perdas no núcleo.

- O laço de histerese tem área nula.
- A corrente de excitação i_ϕ é não puramente senoidal, mas está em fase com ϕ.
- A componente fundamental de i_ϕ está atrasada de 90º em relação à tensão.
- O circuito equivalente é puramente indutivo.

Corrente de excitação **com** perdas no núcleo:

- Devemos considerar o laço de histerese.
- A corrente de excitação i_ϕ é não puramente senoidal e tem componente defasado.

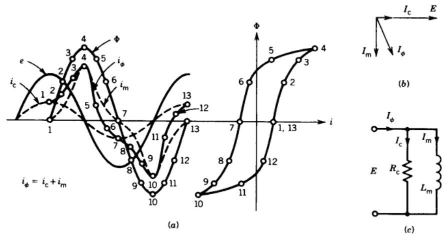

Figura 10: Corrente de excitação sem perdas no núcleo.

- i_ϕ pode ser dividida em duas componentes: i_c, em fase com a tensão, e i_m, em fase com o fluxo (atrasada 90º da tensão).
- O circuito equivalente tem uma resistência R_c em paralelo com uma indutância L_m.

O fluxo disperso (*leakage flux*) pode ser modelado como relutância em paralelo com a relutância do núcleo. A modelagem elétrica disso é feita por indutâncias em série.

$$\frac{1}{\mathcal{R}} = \frac{1}{\mathcal{R}_l} + \frac{1}{\mathcal{R}_m}$$

$$L = L_l + L_m$$

Circuito elétrico equivalente completo:

1. Resistência do fio da bobina: resistência R_w em série com as indutâncias.
2. Fluxo disperso: indutância de dispersão L_l em série com a indutância do núcleo.
3. Perdas no núcleo: resistência R_c em paralelo com a indutância do núcleo.
4. Magnetização do material magnético: indutor ideal L_m

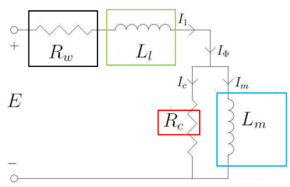

Figura 11: Circuito equivalente completo para o núcleo-bobina.

1.4 Ímãs permanentes

Ímã permanente: capaz de manter um campo magnético sem que lhe seja fornecida excitação ou FMM. Entre suas características, estão:

- Campo magnético coercitivo H_c alto.
- Densidade de fluxo remanescente B_r disponível para utilização, dependendo do circuito magnético e se não houve desmagnetização.
- A densidade de fluxo remanescente pode ser perdida por temperatura, vibração ou campo magnético reverso.

Definições:

- *Material magnético mole*: material com campo coercitivo baixo ($50 A/m$).

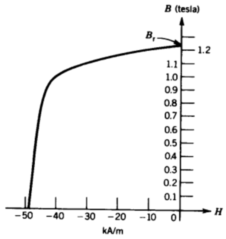

Figura 12: Exemplo de curva de desmagnetização para ímã permanente.

- *Material magnético duro*: material com campo coercitivo alto ($150kA/m$) - ímãs permanentes.

Tipos de ímãs permanentes:

- Cerâmicos - ferrites de bário e estrôncio.
- AlNiCo - ligas de Fe, Al, Ni, Co
- Terras raras - ligas SmCo ou NeFeB

Funcionamento de dispositivos com ímãs permanentes:

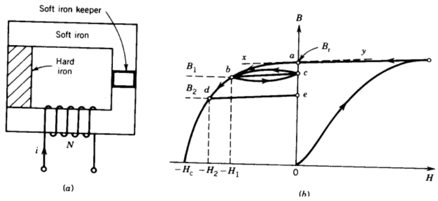

Figura 13: Ímã permanente e curva $B \times H$.

- A densidade de fluxo residual é obtida aplicando um campo magnético durante a fabricação.
- Se o ímã permanente for sujeito a um campo desmagnetizante (na direção contrária), B diminuirá seguindo o laço de histerese.
- Se esse campo for retirado e reaplicado, o dispositivo seguirá um laço fino de histerese. Esse laço pode ser aproximado por um segmento de reta (*recoil line*).
- Para diferentes campos desmagnetizantes, diferentes *recoil lines* são seguidas.
- A permeabilidade de *recoil* é definida como a inclinação da recoil line.

Funcionamento de dispositivos com ímãs permanentes:

- Em geral, ímãs permanentes são usados em circuitos magnéticos em que são a única fonte de fluxo magnético.
- Em geral, os dispositivos operam somente na fase de desmagnetização (2º quadrante).
- O aumento da relutância do circuito magnético causa desmagnetização do ímã permanente.

Análise:

1. Corrente alternada aplicada a um laço de histerese.
2. Corrente é desligada $\rightarrow H = 0$.
3. O material magnético mole é retirado, aumentando a impedância do circuito.

4. Considerando permeabilidade magnética do material mole infinita, o ponto de operação do material é definido pelo cruzamento da curva de magnetização com a reta dada pela *shear line*.

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = Ni \Rightarrow H_m l_m + H_g l_g = 0 \Rightarrow H_g = -\frac{H_m l_m}{l_g}$$

Para considerar o efeito da dispersão, define-se $q = \frac{\phi_m}{\phi_g} \geq 1$.

$$q\phi_g = \phi_m \Rightarrow qB_g A_g = B_m A_m \Rightarrow B_m = \frac{qB_g A_g}{A_m} \Rightarrow B_m = \frac{q\mu_0 H_g A_g}{A_m}$$

$$\therefore \boxed{B_m = -q\mu_0 \frac{A_g}{A_m} \frac{l_m}{l_g} H_m}$$

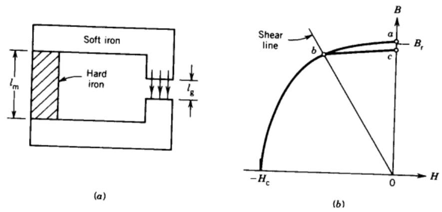

Figura 14: Ímã permanente e curva $B \times H$.

5. Se a relutância for diminuída, o dispositivo operará sobre a *recoil line*.

Estabilização de materiais com ímãs permanentes: para simular o uso do dispositivo, são aplicados campos desmagnetizantes até o valor da intensidade de campo mais negativa em que o dispositivo vai operar.

Podemos calcular o volume de material magnético V_m necessário para impor uma densidade de fluxo B_g em um entreferro de volume B_g:

$$H_m l_m + H_g l_g = 0 \Rightarrow l_m = -\frac{H_g l_g}{H_m}$$

$$q\phi_g = \phi_m \Rightarrow qB_g A_g = B_m A_m \Rightarrow A_m = \frac{qB_g A_g}{B_m}$$

$$V_m = |l_m||A_m| = \left(\frac{H_g l_g}{H_m}\right)\left(\frac{qB_g A_g}{B_m}\right) \Rightarrow \boxed{V_m = \frac{qB_g^2}{\mu_0 H_m B_m} V_g}$$

Quanto maior o produto $H_m B_m$, menor o volume V_m necessário. O valor máximo de $H_m B_m$ é definido como **produto de energia** do material magnético.

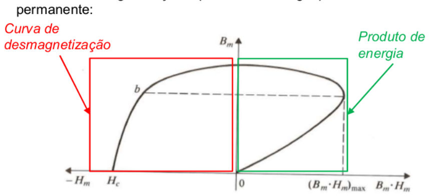

Figura 15: Curva $B \times H$ para ímã permanente.

2 Transformadores

Um transformador é uma máquina estática que consiste de dois ou mais enrolamentos acoplados magneticamente. Sua principal função é aumentar ou diminuir níveis de tensão e corrente. Entre suas aplicações estão: sistemas de transmissão e distribuição de energia elétrica, alimentação de equipamentos eletrônicos, transdutores de sinais, isolamento elétrico de circuitos, casamento de impedâncias.

Transformadores com *núcleo de ferro* são usados em aplicações de alta potência, por permitir grandes densidades de fluxo. Transformadores de *núcleo de ar* têm baixo acoplamento magnético e são usados em circuitos eletrônicos de baixa potência.

Quanto ao tipo de construção, podemos ter: *core type* (formato retangular), *shell type* (formato retangular com uma perna central), *cut core* (lâminas dobradas em formato de C), *núcleo contínuo* (lâminas enroladas ao redor de si mesmas).

Quanto à construção dos núcleos *core type* e *shell type*, podemos ter: *camadas topadas* (lâminas empilhadas na mesma direção - possibilita transporte individual das peças, mas há maior entreferro nas faces em contato) ou *camadas de núcleo sobrelapadas* (lâminas em posições invertidas - diminui entreferro).

Em relação aos enrolamentos, temos: *primário* - ligado à fonte que fornece potência ao transformador; *secundário* - ligado à carga que absorve potência do transformador. *Lado de alta* - ligado à tensão mais alta; *lado de baixa* - ligado à tensão mais baixa. Temos transformadores elevadores e abaixadores.

Os valores nominais (rated) se referem aos valores máximos suportados por cada enrolamento de um transformador[6].

2.1 Transformadores ideais

Hipóteses:

1. As resistências dos enrolamentos são desprezíveis.
2. Não há dispersão de fluxo (está todo confinado no núcleo).
3. Permeabilidade do núcleo infinita (relutância nula).
4. Perdas por histerese e correntes de Foucault nulas.

Relação de tensões:

$$\boxed{\frac{v_1}{v_2} = \frac{e_1}{e_2} = \frac{N_1}{N_2} = a}$$

Relação de correntes:

$$\boxed{\frac{i_1}{i_2} = \frac{N_2}{N_1} = \frac{1}{a}}$$

Relação de potência instantânea:

$$\boxed{p_1 = v_1 i_1 = v_2 i_2 = p_2}$$

As relações também são válidas para fasores:

$$\frac{\hat{V}_1}{\hat{V}_2} = \frac{N_1}{N_2} = a$$

$$\frac{\hat{I}_1}{\hat{I}_2} = \frac{N_2}{N_1} = \frac{1}{a}$$

$$|S_1| = V_1 I_1 = V_2 I_2 = |S_2|$$

Reflexão de impedância (impedância conectada no secundário vista pelo primário):

$$\boxed{Z_2' = a^2 Z_2 = Z_1}$$

[6] São sinônimos potência nominal (*rated power*) e plena carga (*full load*).

A maneira como os condutores são enrolados influencia no sentido das correntes. A polaridade de um terminal está associada ao sentido da FMM gerada pela corrente que entra por ele. Terminais com a mesma polaridade são identificados para indicar as conexões corretas.

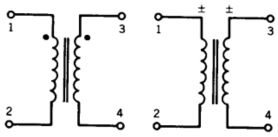

Figura 16: Identificação da polaridade.

2.2 Transformadores reais

Descartaremos as hipóteses do transformador ideal:

1. Um resistor em série representa resistência R do enrolamento.
2. Relutância do fluxo disperso modelada por indutância em série $X_l = \omega L_l$.
3. Relutância do núcleo representada com uma indutância de magnetização $X_m = \omega L_m$.
4. Efeitos de histerese e correntes de Foucault representados por resistência R_c.

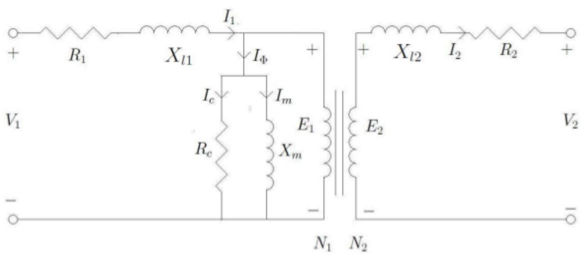

Figura 17: Modelo do transformador real.

É usual refletir todas as grandezas para o primário. Ao refletir a impedância ligada ao secundário, tem-se o circuito completo a ser analisado.

Simplificações de circuito equivalente:

1. Se
$$R_1 + X_{l1} \ll \left(\frac{1}{R_c} + \frac{1}{X_m} + \frac{1}{X'_{l2} + R'_2 + Z'_{l2}}\right)^{-1},$$
então $V_1 \approx E_1$ e é possível inverter a posição dos ramos de magnetização e do núcleo.

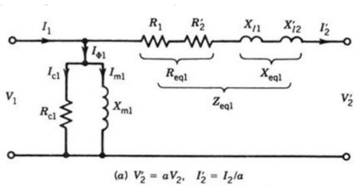

Figura 18: Primeira simplificação.

2. Se a corrente de magnetização e a de perdas forem desprezíveis, podemos desconsiderar esses ramos.

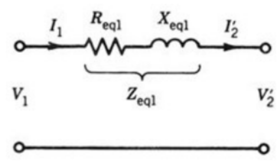

Figura 19: Segunda simplificação.

2.3 Determinação dos parâmetros de transformadores

Para determinar resistências e reatâncias do circuito, podemos usar dois ensaios:

1. Ensaio em aberto (***o**pen-**c**ircuit*): determina resistência de perdas no núcleo e reatância de magnetização.
2. Ensaio em curto (***s**hort-**c**ircuit*): determina as resistências AC das bobinas e das indutâncias de dispersão.

Hipótese fundamental: $R_1, X_{l1}, R_2, X_{l2} \ll R_c, X_m$. Deve ser verificada após obter os resultados.

Ensaio em aberto

Procedimento:

1. Aplica-se tensão nominal a um enrolamento (normalmente o lado de baixa) e o outro é mantido em aberto.
2. Mede-se: valor RMS da tensão V_{ocRMS} e da corrente I_{ocRMS} e potência ativa P_{oc}[7].

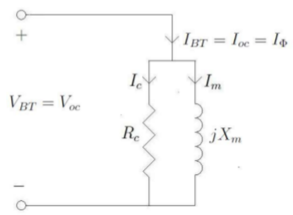

Figura 20: Circuito do ensaio aberto.

- Pela hipótese, pode-se considerar $R_{BT} \approx X_{lBT} \approx 0$.
- Toda a potência P_{oc} é dissipada no núcleo e a tensão sobre R_c é V_{ocRMS}, então

$$R_c \approx \frac{V_{ocRMS}^2}{P_{oc}}$$

- A corrente I_{oc} medida é composta por I_c e I_m, ortogonais. Temos:

$$I_{cRMS} \approx \frac{V_{ocRMS}}{R_c}$$

$$I_{mRMS} = \sqrt{I_{ocRMS}^2 - I_{cRMS}^2}$$

- Do valor de I_m, temos

$$X_m \approx \frac{V_{ocRMS}}{I_{mRMS}}$$

Procedimento alternativo:

[7]Opcionalmente, mede-se valor RMS da tensão no enrolamento em aberto.

- A partir dos valores de tensão, corrente e potência aparente medidos, obtém-se o fator de potência e o ângulo entre tensão e corrente:
$$f_p = \frac{S}{P} = \frac{V_{ocRMS} I_{ocRMS}}{P_{oc}}$$
$$\theta = \arccos(f_p)$$

- Como $I_{ocRMS} = I_m + I_c$, temos que
$$I_{mRMS} = I_{ocRMS} \sin\theta$$
$$I_{cRMS} = I_{ocRMS} \cos\theta$$

- Por fim, calcula-se R_c e X_m como
$$R_c \approx \frac{V_{ocRMS}}{I_{cRMS}}, \ X_m \approx \frac{V_{ocRMS}}{I_{mRMS}}$$

Ensaio em curto

Procedimento:

1. Aplica-se corrente nominal a um dos enrolamentos (normalmente lado de alta) e deixa-se o outro em curto.
2. Mede-se: corrente RMS que é aplicada I_{scRMS}, tensão aplicada V_{scRMS} e potência ativa P_{sc}.

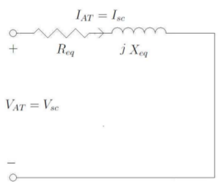

Figura 21: Circuito do ensaio em curto.

- Toda a potência P_{sc} é dissipada na resistência equivalente e a corrente I_{sc} é medida. Portanto,
$$R_{eq} = \frac{P_{sc}}{I_{sc}^2}$$

- Para calcular a reatância equivalente:
$$|Z_{eq}| = \frac{|V_{sc}|}{I_{sc}} = \frac{V_{scRMS}}{I_{scRMS}}$$
$$X_{eq} = \sqrt{|Z_{eq}|^2 - R_{eq}^2}$$

- Para estimar os valores individuais das resistências AC, mede-se os valores das resistências DC com um ohmímetro.
$$ReqDC = R_{ATDC} + R'_{BTDC}$$
$$R_{AT} = \frac{R_{ATDC}}{R_{eqDC}} R_{eq}, \ R'_{BT} = \frac{R'_{BTDC}}{R_{eqDC}} R_{eq}$$

- Por construção, podemos aproximar as relutâncias de dispersão como iguais nos dois enrolamentos. Nesse caso,
$$X'_{lBT} = X_{lAT} = \frac{X_{eq}}{2}$$

2.4 Regulação de tensão

É uma medida da diferença entre tensão no secundário em aberta e com carga, dividida pela tensão no secundário com carga.

$$Reg = \frac{|V_2|_{aberto} - |V_2|_{carga}}{|V_2|_{carga}}$$

Podemos refletir tensões para o primário e considerar $|V_2'|_{carga} = |V_2'|_{nom}$ e $|V_2'|_{aberto} = |V_1|$. Então temos:

$$Reg = \frac{|V_1| - |V_2'|_{nom}}{|V_2'|_{nom}}$$

Procedimento para determinação:

1. Calcular o fasor de corrente de uma carga: $|I| = \%_{carga} \times I_{nom}$ e $\theta_I = \arccos(f_p)$
2. Calcular V_1 tal que a tensão no secundário seja nominal para aquela corrente.

Diagrama fasorial:

$$V_1 = V_2' + (R_{eq} + jX_{eq})I_2'$$

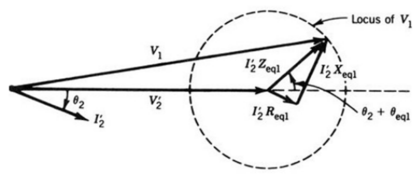

Figura 22: Lugar geométrico da regulação de tensão.

O tensão no primário será máxima quando $I_2' Z_{eq1}$ estiver em fase com V_2', i.e., $\theta_2 + \theta_{eq1} = 0$.

2.5 Rendimento

Rendimento definido como

$$\eta = \frac{P_{out}}{P_{in}} = \frac{P_{out}}{P_{out} + P_{perdas}}$$

Perdas no transformador:

$$P_{perdas} = P_{Cu} + P_c$$

$$P_{Cu} = R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 = Req1 I_1^2 = R_{eq2} I_2^2$$

$$P_c = R_c I_c^2 = P_{oc}$$

Potência ativa no secundário:

$$P_{out} = V_2 I_2 \cos\theta_2$$

Rendimento máximo:

$$\frac{\partial \eta}{\partial I_2} = 0 \Rightarrow P_c = R_{eq2} I_2^2$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial \theta_2} = 0 \Rightarrow \cos\theta_2 = 1$$

Rendimento ao longo do dia:

$$\eta_{dia} = \frac{E_{out24h}}{E_{in24h}} = \frac{E_{out24h}}{E_{out24h} + E_{perdas24h}}$$

2.6 Autotransformadores

São uma montagem especial de transformadores. Vantagens: maior tensão no lado de alta, maior corrente no lado de baixa, maior potência suportada. Desvantagem: ligação elétrica entre primário e secundário.

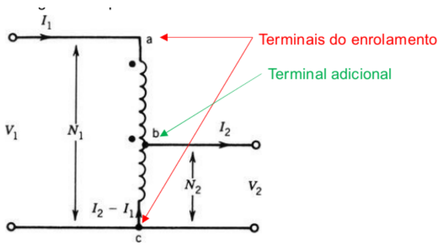

Figura 23: Autotransformador.

Relações de tensão e corrente:

$$\frac{V_1}{V_2} = a, \ \frac{I_1}{I_2} = \frac{1}{a}$$

2.7 Transformadores trifásicos

Tipos de associação:

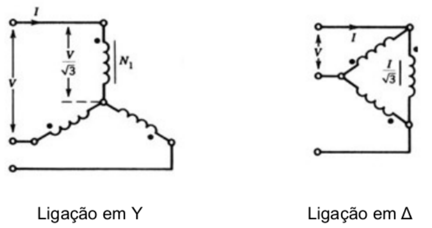

Figura 24: Associação Y e Δ.

Tipos de banco de transformadores:

- $\Delta - \Delta$ - permite retirar um transformador para manutenção
- $\Delta - Y$ - vantajosa para transformadores elevadores
- $Y - \Delta$ - vantajosa para transformadores abaixadores
- $Y - Y$ - pouco usada. Não filtra harmônicas e necessita de neutro comum

Hipótese para análise: cargas balanceadas. Estratégia: estabelecer relações duas a das entre terminais do primário / enrolamentos do primário / enrolamentos do secundário / terminais do secundário.

Convenções:

- Correntes entram no primário e saem no secundário.
- Convenção de receptor no primário e fonte no secundário.
- Terminais do primário em minúsculas (a, b, c) e do secundário em maiúsculas (A, B, C).

Relações de correntes e tensões:

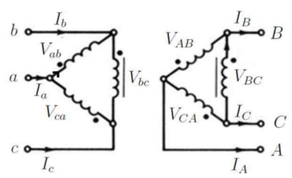

Figura 25: Relações $\Delta - \Delta$.

Mudança de fase:

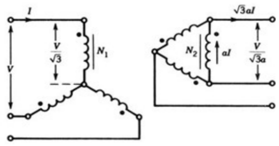

Figura 26: Relações $Y - \Delta$.

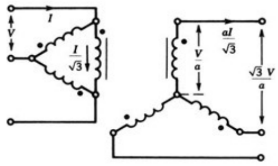

Figura 27: Relações $\Delta - Y$.

- Ligação $\Delta - \Delta$ e $Y - Y$ não apresenta defasagem.
- Ligação $Y - \Delta$ e $\Delta - Y$ apresenta defasagem das grandezas.

Monofásico equivalente:

- Grandezas em Y.
- Cargas em Δ substituídas pelo Y equivalente.

$$\frac{Z_\Delta}{Z_Y} = 3$$

- Tensão de fase e corrente de linha.
- Trafo $Y - Y$ equivalente.

Ligação em V:
As potências são:

$$P_{ab} = V_{ab} I_a \cos(30 + \phi)$$
$$P_{bc} = V_{bc} I_c \cos(30 - \phi)$$

Mas usando $|V_{ab}| = |V_{bc}| = V$ e $|I_a| = |I_c| = I$, concluímos que a potência fica limitada a

$$\frac{P_V}{P_\Delta} = \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0,58$$

2.8 Harmônicas em bancos de transformadores

- Efeitos da saturação deformam as formas de onda de tensão/corrente.
- As harmônicas de ordens múltiplas de 3 das três fases estão em fase.
- Caso 1 - SW1 fechada e SW2 aberta: há corrente de 3ª harmônica no neutro. Não há tensão resultante no Δ.
- Caso 2 - SW1 e SW2 abertas: há componente de 3ª harmônica de tensão nos enrolamentos de fase, mas não nos de linha. *Ligação Y é filtro de 3ª harmônica de tensão.*
- Caso 3 - SW1 aberta e SW2 fechada: *Ligação Δ é filtro de 3ª harmônica de corrente.*

Ligação $Y - Y$ com terciário: Para altas tensões, pode ser desejável fazer uma ligação $Y - Y$. Usa-se um enrolamento terciário para que as correntes de 3ª harmônica fluam por ele. Ele também pode ser ligado a alguma carga.

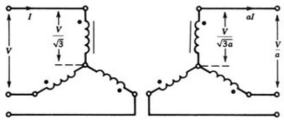

Figura 28: Relações $Y-Y$.

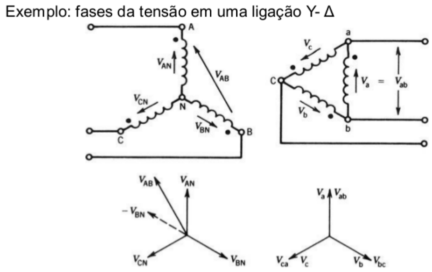

Figura 29: Exemplo de defasagem.

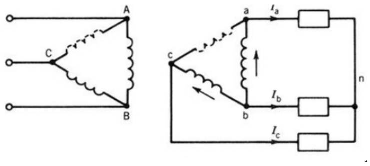

Figura 30: Esquema da ligação V.

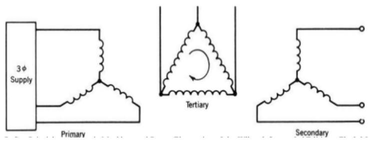

Figura 31: Ligação $Y-Y$ com terciário.

2.9 Sistema PU

O sistema PU (por unidade) permite simplificar cálculos. Em transformadores, os valores físicos das grandezas são diferentes nos enrolamentos, mas em PU eles são iguais.

$$X_{fisico} = X_{PU} X_{base}$$

Escolhem-se como bases:

$$S_{base} = S_{nominal}$$

$$V_{1base} = V_{1nomnal},\ V_{2base} = V2nomnal$$

Como consequência:

$$I_{base} = \frac{S_{base}}{V_{base}}$$

$$Z_{base} = \frac{(V_{base})^2}{S_{base}}$$

Obs.: As perdas ôhmicas no cobre a plena carga em PU é numericamente igual à resistência equivalente em PU.

$$P_{CuPU_{FL}} = R_{eqPU}$$

3 Conversão eletromecânica de energia

3.1 Processo de conversão de energia

Conversão eletromecânica de energia é a conversão de energia elétrica em mecânica e vice-versa. Nesse processo há sempre três sistemas: elétrico, mecânico e magnético. Em todos eles há perda de energia (perdas ôhmicas Ri^2, perdas por atrito e perdas por histerese e corrente de Foucault), que é dissipada na forma de calor.

Vamos usar o princípio da conservação de energia e supor que não há transformação entre massa e energia. Podemos escrever a conservação de duas formas:

Energia fornecida = Energia mecânica + Variação da energia no campo magnético + Perdas (calor)

$$\boxed{\underbrace{dW_e}_{\text{Energia elétrica - perdas}} = \underbrace{dW_m}_{\text{Energia mecânica + perdas}} + \underbrace{dW_f}_{\text{Energia no campo magnético + perdas}}}$$

Conforme visto na seção 1.2, a energia em um material magnético pode ser dada por

$$W_f = V w_f, \text{ em que } w_f = \int_{B_1}^{B_2} H(B)dB$$

Essa energia pode ser calculada como uma área na curva $B \times H$ do material.

Para um dispositivo magnético (desprezando energia mecânica e perdas):

$$W_f = W_e = \int_{t_1}^{t_2} e(t)i(t)dt$$

Da relação entre tensão e fluxo concatenado, temos $d\lambda = edt$, portanto:

$$W_f = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} id\lambda$$

Essa energia pode ser calculada como uma área na curva $\lambda \times i$ específica do dispositivo estudado.

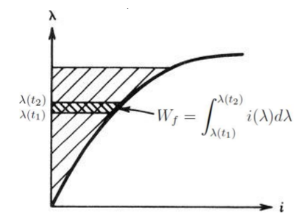

Figura 32: Energia calculada na curva $\lambda \times i$.

Considere o dispositivo eletromecânico a seguir, cuja parte móvel é mantida fixa.

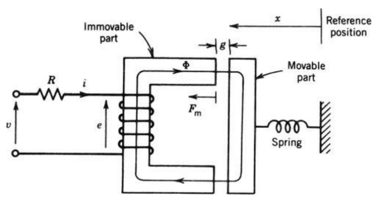

Figura 33: Dispositivo eletromecânico.

Para ele, temos:

$$Ni = H_c l_c + H_g l_g \Rightarrow i(t) = \frac{H_c l_c + (B_g/\mu_0) l_g}{N}$$

$$\lambda = N\phi = NBA$$

Substituindo na equação de energia, temos:

$$\boxed{W_f = V_c \underbrace{\int_{B_1}^{B_2} H_c(t)dB}_{w_{fc}} + V_g \underbrace{\frac{B_g^2}{2\mu_0}}_{w_{fg}}}$$

em que w_{fc} é a densidade volumétrica de energia no núcleo e w_{fg} no entreferro; e os volumes são tais que $V_c = Al_c$ e $V_g = Al_g$[8].

Se o material é linear, $H_c = \frac{B_c}{\mu_c}$ e $w_{fc} = \frac{B_c^2}{2\mu_c}$.

A característica $\lambda \times i$ de um dispositivo depende do tamanho do entreferro e da curva $B \times H$.

A energia W_f armazenada no campo magnético é dada pela área entre a curva e o eixo λ. A área entre a curva e o eixo i é definida como *coenergia* W_f' e não tem significado físico. Valem as relações:

$$W_f' = \int_{i_1}^{i_2} i d\lambda$$

$$W_f + W_f' = \lambda i$$

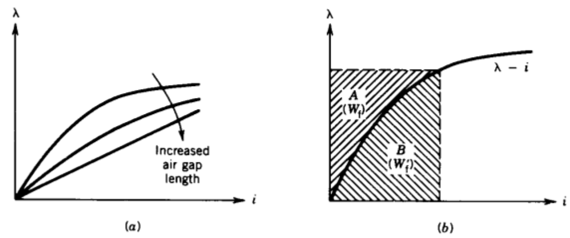

Figura 34: (a) Variação da curva com comprimento do entreferro (b) Representação da energia e coenergia.

3.2 Força mecânica em um dispositivo eletromagnético

Consideramos o mesmo dispositivo da Figura 33. Para calcular a força, basta avaliar a derivada da energia mecânica no espaço.

$$f_m = \frac{dW_m}{dx}$$

A curva no gráfico $\lambda \times i$ descrita pela movimentação da parte móvel do dispositivo é *apb*:

1. No caminho *ap*, ocorre diminuição do entreferro, aumentando o fluxo concatenado. Isso induz tensão na bobina, de forma a diminuir a corrente no circuito elétrico.

2. No trecho *pb*, não há mais movimentação do dispositivo. A taxa de variação do fluxo diminui, a tensão induzida diminui e a corrente no circuito aumenta.

3. No ponto *b*, não há tensão induzida na bobina e a corrente nela volta ao valor inicial.

Conclusões:

- A variação de energia mecânica é igual à variação de coenergia durante a movimentação.

$$\Delta W_m = \Delta W_f'$$

[8]Em geral, a energia armazenada no entreferro é muito maior que a armazenada no núcleo ($W_{fg} \gg W_{fc}$).

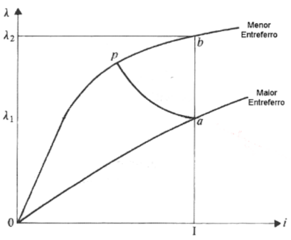

Figura 35: Curva descrita pela movimentação da parte móvel.

- Para uma movimentação infinitesimal dx, a variação de coenergia é a mesma, independente da velocidade do movimento. Assim, temos duas maneiras de calcular a força:

$$\boxed{f_m(x) = \frac{\partial W_f'}{\partial x} = -\frac{\partial W_f}{\partial x}}$$

- A força magnética tende a aumentar a coenergia (diminuir a energia). Isso corresponde a diminuir a relutância do circuito magnético.

3.2.1 Dispositivos lineares

Em dispositivos lineares, pode-se definir uma indutância, que varia com a movimentação da parte móvel, isto é, com o comprimento do circuito magnético.

$$L = L(x) = \frac{\lambda}{i} = \frac{N^2}{\mathcal{R}}$$

A energia no campo pode ser calculada como

$$W_f = \int_0^\Lambda i d\lambda' = \int_0^\Lambda \frac{\lambda}{L} d\lambda = \frac{\Lambda^2}{2L} = \frac{(Li)^2}{2L}$$

$$\therefore W_f = \frac{1}{2} L(x) i^2$$

Em um sistema linear, a variação da coenergia é numericamente igual à variação de energia magnética.

$$\boxed{W_f' = W_f = \frac{1}{2} L(x) i^2}$$

Para o cálculo da força, temos:

$$\boxed{f_m = -\frac{\partial W_f}{\partial x} = \frac{\partial W_f'}{\partial x} = \frac{i^2}{2} \frac{dL(x)}{dx}}$$

Relação entre força e densidade de fluxo no dispositivo a seguir:

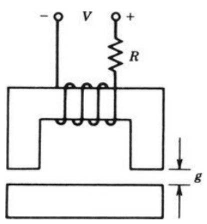

Figura 36: Dispositivo eletromecânico.

1. Considerando a relutância dos entreferros muito maior que no núcleo:

$$Ni = H_g l_g = \frac{B_g}{\mu_0} l_g$$

2. Energia armazenada no circuito:

$$W_f = V_g \int_0^{B_g} \frac{B}{\mu_0} dB = A_g l_g \frac{B_g^2}{2\mu_0}$$

3. Força mecânica:

$$f_m = -\frac{\partial W_f}{\partial g}$$

   Nesse caso $l_g = 2g$, então $f_m = -\frac{B_g^2}{2\mu_0} 2A_g$.

Pressão magnética: razão entre força e área.

$$F_m = \frac{f_m}{A}$$

Efeito da alimentação CA:
A impedância do circuito elétrico terá um termo resistivo e outro indutivo $Z = R + j\omega L$. Assim, o valor da corrente será menor ($i_{CC} >_{CA}$). Portanto fluxo e campo magnéticos serão menores. *A energia e a força serão menores.*

3.3 Introdução às máquinas elétricas rotativas

Máquinas elétricas fazem a conversão eletromecânica de energia. Podem atuar como motor (elétrica → mecânica) ou gerador (mecânica → elétrica).
Princípios básicos de funcionamento:

1. Quando um condutor que carrega corrente elétrica se movimenta em um campo magnético, surge uma força sobre o condutor.

$$\mathbf{F} = i(\mathbf{l} \times \mathbf{B})$$

2. Quando um condutor se move em campo magnético com uma velocidade, uma tensão é induzida no condutor.

$$e = (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{l}$$

Partes das máquinas elétricas rotativas:

- Estator - parte fixa
- Rotor - parte livre para girar
- Enrolamento de campo
- Enrolamento de armadura
- Entreferro
- Polos

Campo girante:

- É um campo magnético que gira.
- Fundamental para máquinas CA (de indução, síncronas, de relutância variável).
- Pode ser obtido com um ímã permanente que gira.

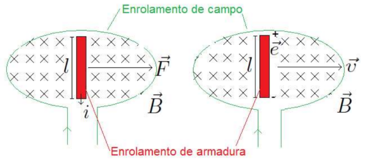

Figura 37: Enrolamentos de uma máquina elétrica rotativa.

- Pode ser obtido com enrolamento trifásico. Dispõem-se as bobinas geometricamente afastadas de 120. Aplicam-se tensões defasadas de 120 elétricos (as fases podem estar em Δ ou Y). A contribuição do fluxo magnético de cada bobina faz surgir um campo resultante que gira no tempo na mesma frequência de alimentação das bobinas.

  Velocidade n_s (RPM) em uma máquina de p polos alimentada com frequência f:

$$n_s = \frac{120f}{p}$$

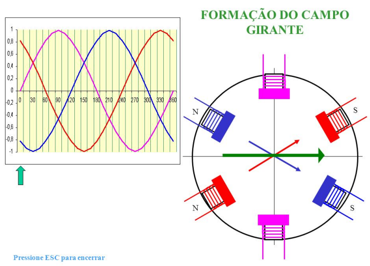

Figura 38: Campo girante por alimentação trifásica.

Máquinas CC:

- Enrolamento de campo no estator e de armadura no rotor.
- Armadura e campo CC (visto dos terminais).
- Aplicações: controle de velocidade, ferramentas industriais, alimentação por bateria, servomotores, sensores de posicionamento.
- Anel comutador e escovas.

Máquinas de indução:

- Enrolamento de armadura e campo no estator.
- Todos enrolamentos CA.
- Aplicações: eletrodomésticos, geradores eólicos, bombas, compressores, ventiladores etc.
- Estator formado por: carcaça, núcleo e enrolamento.
- Tipos de estator: gaiola de esquilo e rotor bobinado.

Máquinas síncrona:

- Enrolamento de campo no rotor e de armadura no estator.
- Armadura CA e campo CC.

- Aplicações: geradores de hidrelétricas e termelétricas, compensadores síncronos, motores, alternadores de automóveis etc.
- Estator formado por: carcaça, núcleo e enrolamento.
- Dois tipos de rotor: polos lisos (máquinas de alta velocidade e pequeno diâmetro) e polos salientes (máquinas de baixa velocidade e grande diâmetro).

3.4 Energia e conjugado em máquinas elétricas rotativas

O estudo de máquinas rotativas é análogo ao de máquinas translacionais, fazendo analogia entre grandezas lineares e angulares. Estudaremos uma máquina de polos salientes elementar.

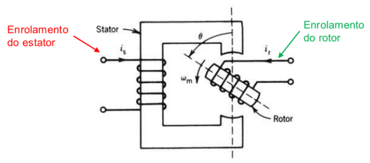

Figura 39: Máquina elétrica rotativa.

Cálculo da energia e conjugado:

1. Considerando o rotor fixo, $W_m = 0$ e a energia magnética depende da energia elétrica no rotor e no estator:
$$dW_f = e_s i_s dt + e_r i_r dt = i_s d\lambda_s + i_r d\lambda_r$$
2. Supondo o sistema linear, $\lambda = Li$ e:
$$\begin{bmatrix} \lambda_s \\ \lambda_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{ss} & L_{sr} \\ Lsr & L_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_s \\ i_r \end{bmatrix}$$
A indutância mútua é simétrica: $L_{rs} = L_{sr}$. Substituindo na expressão para energia:
$$dW_f = L_{ss} i_s di_s + L_{rr} i_r di_r + L_{sr} d(i_s i_r)$$
$$W_f = \int dW_f = \frac{L_{ss} i_s^2}{2} + \frac{L_{rr} i_r^2}{2} + L_{sr} i_s i_r$$
3. O torque pode ser calculado de maneira análoga ao caso translacional:
$$T = \frac{\partial W_f'}{\partial \theta} = \frac{\partial W_f}{\partial \theta} = \underbrace{\frac{i_2^2}{2}\frac{dL_{ss}}{d\theta} + \frac{i_r^2}{2}\frac{dL_{rr}}{d\theta}}_{\text{conjugado de relutância}} + \underbrace{i_s i_r \frac{dL_{sr}}{d\theta}}_{\text{devido à variação de } L_{sr}}$$

3.4.1 Máquinas de rotor cilíndrico

Vamos estudar uma máquina monofásica de dois polos e rotor cilíndrico.

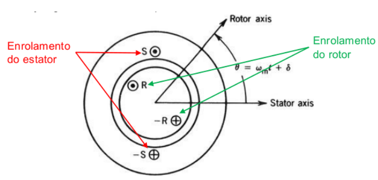

Figura 40: Máquina de rotor cilindrício.

Condições:

- Não há variação de relutância do caminho magnético com a rotação do rotor.

- As indutâncias próprias se mantêm constante, logo elas não geram torque.
- A indutância mútua varia com a posição do rotor.

O torque produzido é

$$T = i_s i_r \frac{dL_{sr}}{d\theta}$$

.

Sejam $L_{sr} = M\cos\theta$[9], $i_s = I_{sm}\cos(\omega_s t)$, $i_r = I_{rm}\cos(\omega_r t + \alpha)$ e $\theta = \omega_m t + \delta$[10]. Temos:

$$T = -\frac{I_{sm}I_{rm}M}{4}\{\sin[(\omega_m+\omega_s+\omega_r)t+\alpha+\delta]+\sin[(\omega_m-\omega_s-\omega_r)t-\alpha+\delta]+\sin[(\omega_m+\omega_s-\omega_r)t-\alpha+\delta]+\sin[(\omega_m-\omega_s+\omega_r)t+\alpha+\delta]\}$$

O valor médio do torque será zero, a não ser que o coeficiente de t seja não-nulo em algum termo. Portanto, haverá torque se

$$\omega_m = \pm(\omega_s \pm \omega_r).$$

Caso especial: máquina síncrona monofásica de polos lisos

$$\omega_r = 0, \omega_m = \omega_s, \alpha = 0$$

Os valores instantâneo e médio do torque são:

$$T = -\frac{I_{sm}I_{rm}M}{2}[\sin(2\omega_s t + \delta) + \sin(\delta)]$$

$$T_{avg} = -\frac{I_{sm}I_{rm}M}{2}\sin(\delta)$$

Para $\omega_m = 0$, não há torque médio, portanto a máquina não desenvolve conjugado de partida. Para máquina de uma fase, o torque é pulsante, o que pode causar vibração, variação de velocidade, ruído etc. Especialmente em máquinas maiores, isso é evitado usando várias fases.

Caso especial: máquina de indução monofásica[11]

$$\omega_m = \omega_s - \omega_r$$

Os torques instantâneo e médio são:

$$T = -\frac{I_{sm}I_{rm}M}{4}[\sin(2\omega_s t + \alpha + \delta) + \sin(-2\omega_r t - \alpha + \delta) + \sin(2\omega_s t - \alpha + \delta) + \sin(\alpha + \delta)]$$

$$T_{avg} = -\frac{I_{sm}I_{rm}M}{4}\sin(\alpha + \delta)$$

Para $\omega_m = 0$, não há torque médio, logo não há conjugado de partida.

Referências

[1] SEN, P. C. *Principles of Electric Machines and Power Electronics*. 2. ed. rev. New York, NY: John Wiley & Sons, 1997.

[2] GIESBRECTH, M.. *Notas de aula ET520 – Princípios de Conversão de Energia*, Unicamp, 2017.

[9] θ é o ângulo entre estator e rotor.
[10] ω_m é a velocidade angular de rotação do rotor.
[11] A máquina é assíncrona.